第一章　質点系の力学

第一節　空間と位置

マクロな位置関係

自然現象を科学的に解釈するためには、現象を体現する物質の存在を特定しなければならない。そのために、物質の空間における位置をどのように定義するか、が最初の作業になる。

宇宙空間では、上下左右という概念は通用しないから、地球人から見て、絶対的な座標軸を導入し、便宜的に用いていることになる。銀河系宇宙に存在する地球人は、楕円状の銀河の長径と、それに垂直な直行軸およびそれら二者に直行な軸、の互いに直交する三軸を導入する。それらの軸に名称を付け、たとえば、図 1-1 のように、*X* 軸,*Y* 軸,*Z* 軸や、東西軸、南北軸、上下軸など、ある物質の位置を、軸を基準として表現する。このとき、軸と物質の間を距離と呼び、その単位は、世界各国によって思い思いに決められ、歴史的にいろいろな変遷をしながらも、今日まで使われてきている。

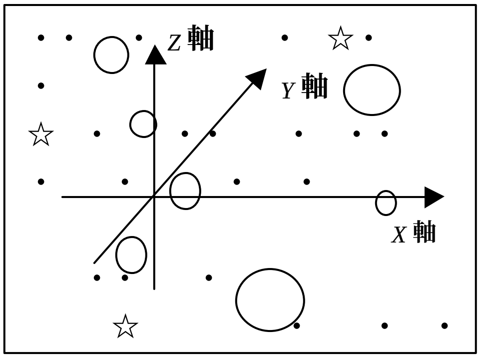


図 1-1 座標軸

日本では、里（4*km*）、間（6 尺、1.8*m*）、尺（3 寸、30.3*cm*）、寸（10.1*cm*）の単位を用いる尺貫法が使われてきたが、1959 年国際標準であるメートル法に切り替えられ、*km*、*m*、*cm*、*mm* が用いられている。メートル法では、1 メートル（1*m*）の基準として、メートル原器がフランスの度量衡研究所におかれている。

宇宙空間における物質の位置は、絶対的な三基準軸からの距離により決定される。しかし、宇宙天体（地球も含め）は常に運動し、その位置を常

に変化させているために、地球人から見て、相対的な物質との位置関係は流動的である。これでは都合が悪いので、微少範囲で考慮でき、しかも位置の決定が不変的であるという、地球人に都合のよい軸を導入してきた。

地球における、位置決定の軸として、古くから用いられてきた緯度・経度がある。緯度は、星座の位置を決定する必要から創造された。太陽の黄道の測定から始まり、恒星の見かけの角度を測量し、黄道から北方へ測量を繰り広げ、緯度を制定した。また、航海する船舶上から、日の出の時刻の測定により海の多地点のデータから、経度を制定した。今日の緯度・経度は地球表面の海抜 0 メートルの水平線上に刻まれた固有のデータとして用いられているが、通信衛星の発展により、微少な値も認識できるようになっている。

航空機や船舶の航行に、緯度・経度は、地球上の現在位置を把握するのに欠かせない。また、空間を飛行するすべての物体の管制や、地上を動く交通機関の位置特定にも用いられている。ただ、巨視的に考える場合、球形の地球表面に刻まれた緯度・経度では、直線的な運動を記述することには不便である。これは、図 1-2 のように、円周上に刻まれた等間隔の目盛りは、直線上に刻むと、等間隔にならないからである。

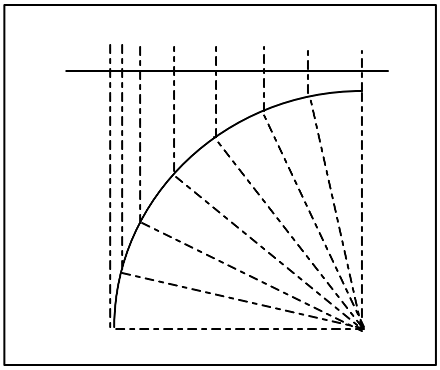


図 1-2 緯度

また、緯度・経度は角度を 60 進法で表現するため、計算が煩雑である。数式を自然科学の手段として用いている現状から、10 進法が適用できるほうが望ましいことはいうまでもない。

ミクロな位置関係

我々の身近な周りで発生する様々な現象を、科学的に解釈するために、物質の位置関係を決定するための軸は、どうあるべきだろうか。日常の諸

現象はたかだか数 *km* までの範囲で発生し、しかも、地球表面は直線であると近似して処理できる。

現象を解釈しようとする人を観測者という。観測者は物質に対する基本軸を必要に応じて設定する。例えば、図 1-3 のように、新幹線が直線軌道を走行する場合には、進行方向に *X* 軸を取り、進行方向を正、その反対方向を負と設定する。また、ヘリコプターの飛行の場合には、観測者は、地面に静止する状態のヘリコプターの機首方向を *X* 軸とする三次元直交座標を考えるであろう。スキーヤーを観測する場合は、スロープの下方を *X* 軸とする三次元直交座標を考えるであろう。これらのように、軸は観測者が他の観測者と関係なく、軸を自由に設定できることを示唆する。

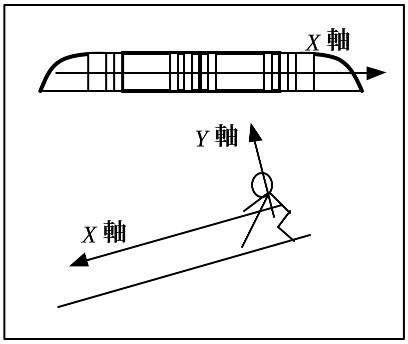


図 1-3 基本軸

座標とは、軸に設定する目盛りから測定した数値のグループで、物質の位置を特定するための数学的表現である。例えば、P(5,8)は、二次元直交 *X*-*Y* 座標で物質 P は *X* 軸から 8、*Y* 軸から 5 の位置に存在することを示す。軸で構成する座標軸は多種多様である。

位置の変化

空間における物質は、常に位置を変え、その軌跡は軸との数値データで把握できる。ある時間に発生する位置の変化は一般に運動と呼ばれ、自然現象解明の糸口となる。三次元直交軸を設定し、その原点 O (0,0,0)から物質 P(x,y,z)に引く線分を動径と呼び、それが物質の運動とともに変化するから、位置の変化を動経の変化と定義してもよい。従って、運動とは、ある軸構成の原点と物質の位置で示される動径の変化といえる。

動径は、原点から物質方向に、矢印付きの線分で表現すれば、三次元空間でのすべての運動を表現し、区別ができる。文字記号では、動径 *OP* を

$$\overrightarrow{OP}$$

と書く。動径は大きさと方向を持ち、矢印で動径の方向を矢の長さで動径の大きさを示す。このような量をベクトル、大きさだけの量をスカラーという。

位置の変化、すなわち、運動をベクトルの概念で表現すれば、数学的処理がたやすくなる。例えば、時間 T の間に、動径 OP が動径 OQ に変化したとき次式のように示せる。ここで、V を物体の速度という。

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}}{T} \tag{1-1}$$

第二節　ベクトルとスカラー

ベクトルの加法・減法

1-1 式の分子はベクトルの引き算であるが、ベクトルの差をベクトル OR とすれば

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \tag{1-2}$$

を

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + (-\overrightarrow{OP}) \tag{1-3}$$

と考える。これは、ベクトル OP の逆ベクトル-OP を加えるとしてよいことを意味する。

図 1-4 のように、ベクトルの和ベクトル OR は、二つのベクトルを二辺とする、平行四辺形の対角線上に引かれる矢で示される。

ベクトル記号の矢印を削除した OR,OQ,OP は、大きさだけのスカラー量を示す。スカラー量の和・差の計算は、両ベクトルが直線上にあるときは、普通の足し算・引き算でよいが、方向が異なるときは、三角関数を用い

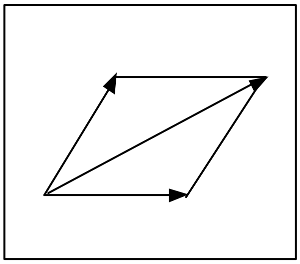


図 1-4 ベクトル和

て計算することになる。

　ベクトル量には、今後学ぶが、速度をはじめ、加速度、力、運動量、力積などがあり、スカラー量には、時間、質量、長さなどがある。スカラー量の計算は、普通の計算でよいが、ベクトル量の和・差計算は、多くの場合、三角関数が必要となる。なお、積には次の二通りがある。

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\sin q \qquad \text{1-4}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin N\Psi \qquad \text{1-5}$$

1-4 はベクトル A とベクトル B の内積と言い、A バーポイント B バーと呼ぶ。1-5 はベクトル A とベクトル B の外積と言い、A バークロス B バーと呼ぶ。右辺を図 1-5 で示すと､次のように説明できる。

　加法の式を

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \qquad \text{1-6}$$

と定めると､次のように移項ができる。これらは､減法の式になるが､最右辺は逆ベクトルとの加法になっている。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + (-\overrightarrow{OQ}) \qquad \text{1-7}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + (-\overrightarrow{OP}) \qquad \text{1-8}$$

　ベクトルの加減法を図解すれば､次のようになる。すなわち､OP,OQ を二辺とする平行四辺形の対角線 OR が､合ベクトル OR となる。

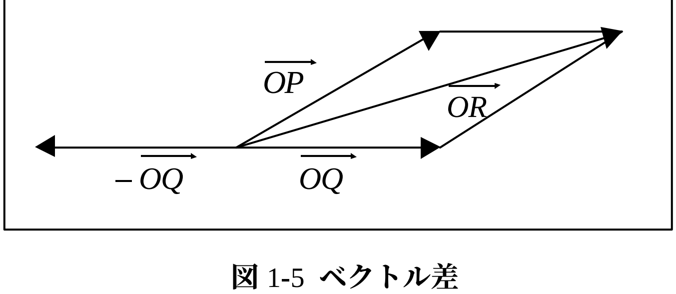


図 1-5 ベクトル差

　ベクトルの性質として､互いに

平行で同方向・同じ大きさの二つのベクトルは等しく、ベクトルの線上であれば、どこに存在していても同じである。また、逆ベクトルは元のベクトルと大きさ等しく、方向が反対で、同一直線上にある。従って、 元のベクトルとその逆ベクトルの和はゼロベクトルとなる。

第三節　万有引力と運動の分類

力の定義

位置の変化は、物質に対する外からの作用により起こる。この作用には各種存在するが、地球に生活するすべての生物、すべての物質が受けている作用に、重力がある。重力は宇宙空間における物質の、相互間に作用する万有引力である。

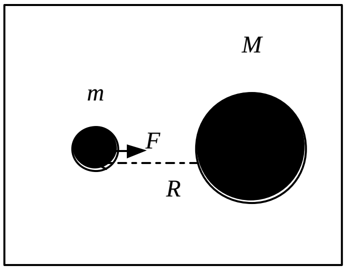


図 1-6 万有引力

この力は、キャベンディッシュらが 1675 年に定式化し、実験的に実証した。

図 1-6 のように、万有引力は、「物質間に働く万有引力の大きさは、両物質の質量の積に比例し、両者間の距離の二乗に反比例する。比例定数を万有引力定数という」と説明できるが、方程式で示せば次のようになる。

$$F = G\frac{mM}{R^2} \qquad 1\text{-}9$$

F は万有引力、m,M は両物体の質量、R は物体間の距離、G は万有引力定数（$6.6720\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2$）である。

図 1-7 のように、地球の半径を R、質量を h、高度 H の人工衛星の質量を m としたとき（ただし、地球に比べて、人工衛星の半径は無視する）人工衛星が受ける地球の引力は次式となる。

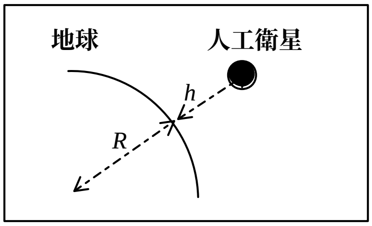


図 1-7 人工衛星

$$F = G\frac{mM}{(h+R)^2} \qquad 1\text{-}10$$

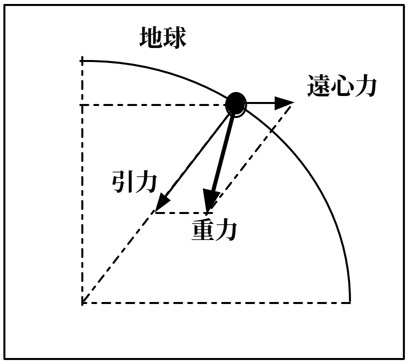


図 1-8　重力

前述したが、地球の引力を、地球人は重力と呼び、この力がすべての物質の、運動の変化を引き起こす、基本的な原因であるとしている。

図 1-8 のように、重力は、1-10 式で示される引力と、地球が自転することによる、遠心力との合力であることを知らなければならない。

重力は、地球の中心方向に生ずるから、その作用は常に、地球中心方向に働く。従って、我々は、物質は足もとの方へ、落下する現象として観測している。

運動の種類

自然界には様々な運動がある。

マクロな運動	宇宙全体の運動、銀河系の運動、惑星・恒星の運動 人工衛星の運動、未確認飛行物体の運動（UFO ?）
身近な運動	落下運動、水平運動、直線運動、曲線運動、ランダム運動、円運動、単振動、回転運動
ミクロな運動	流体の運動、個体分子の振動、原子の運動、微粒子の運動、素粒子の運動、波動、熱伝搬、抵抗

これらの運動を記述するには、その手段が必要である。簡単で易しく、世界共通の表現が求められる。現在、ローマ字・ギリシャ文字・10 進数・特殊記号などと、数学の表現が用いられている。特に、世界公用語とされる英語の表現と、語彙の頭文字・略語が使われている。方程式中の文字はほとんどの場合、英語の頭文字を多用している。例えば、位置 P(*Position*) 質量 M(*Math*)、時間 T(*Time*)、速度 V(*Velocity*)、加速度 A(*Acceleration*)半径 R(*Radius*)、力 F(*Force*)、などである。

記号については、添え字をつけて区別することが多い。例えば、力が物質に多数作用するとき、$F_1,F_2,F_3,$・・・・F_nや、質量 M,M',M''などである。変数については、X,Y,Z が用いられ、長さは、$a,b,c,l,m,n,$などが使われる。ただし、英語を中心とするよりも、日常使用する言語と使用文字によって、表現する国もある。ギリシャ文字は、αβγδεζηθκμλμνξοπρστφχψω、が物理学で多用されるので、書き方と、発音をマスターしなければならない。数学の記号は、四則演算子(＋,－,×, /) と微分・積分、統計・確率、などに用いられるものがある。

質点系と剛体系

運動の種類を上記のように分けず、大きく二つのグループに分ける場合がある。それは、質点系の物理学と剛体系の物理学である。質点系は、物質の質量は物質の重心に存在し、大きさや形を無視し、単なる点として扱う（高校の物理や大学の入試問題）。剛体系は、質量は重心に集約されるが、大きさと形を考え、日常身の回りに発生する自然現象を取り上げるため、運動の記述には、並進運動と回転運動や流体の抵抗を考慮しなければならない。したがって、質点系よりもはるかに複雑な解析が必要となる。

並進運動と回転運動

並進運動は、図 1-9 のように、物体の各点を結ぶすべての線分が互いに平行となっている。物体の各点の質量は物体の重心に集約される。 重心を O 点とし、物体の全質量を M、微少な各点の質量を m_i $(i$=1～$n)$、O 点と各点との距離を r_i $(i$=1～$n)$とすれば、次の式が成立する。

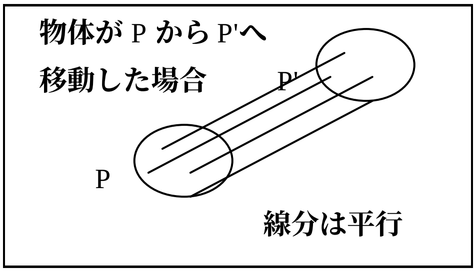


図 1-9 並進運動

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots\cdots m_n r_n = \sum m_i r_i = 0 \qquad \text{1-11}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots\cdots m_n = \sum m_i = M \qquad 1\text{-}12$$

上式は、微少な質量に作用する引力の重心 O に対する周りのモーメントの和がゼロであることと、それらの質量の総和が全質量であることを示す。

回転運動は図 1-10 のように、回転軸が存在し、物体の全ての点が回転軸に対して円を描く。回転軸は物体の中にある場合と外にある場合がある。

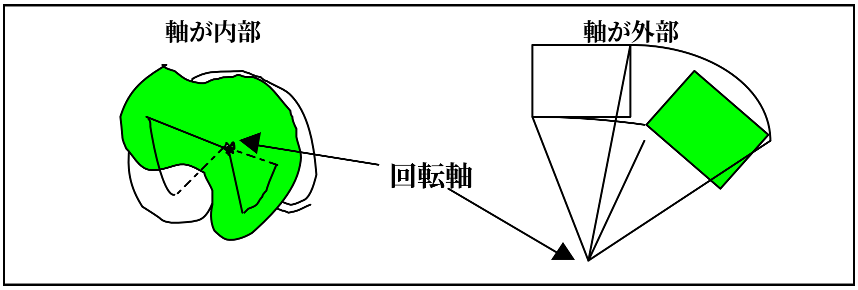


図 1-10 回転運動

軸が内部の場合には、並進運動が無関係で、純粋な回転運動である。例えば、時計の秒針や工場などのモーター、止めてある自転車の車輪を回したとき、また、紐につるした重りを回すとき、などである。外部の場合では、野球選手がバットを振る、重りに紐をつけ手を動かさずに円運動させる、地球が引力で月を引き地球の周りを回転させるとき、などである。

日常現象の多くは、マクロな見方をすれば、絶対的な固定軸は存在せず、軸は宇宙空間で移動しているため、ミクロな回転系が複合した状態で行われている。例えば、先の例で、太陽の引力が地球・月群を引力で回転させ、その太陽は、銀河系内の軸に対して回転しており、さらに、銀河そのものが宇宙で運動している。従って、並進運動も、ミクロな領域で説明しているだけであって、マクロ的に考えれば、回転系の運動も関係することはいうまでもない。

回転軸と回転面

ある物体の一部が、物体内部の軸で回転し、その物体全体が並進または、回転運動をする場合が一般的である。例えば、オフロードを走行する自転

車や、走行する新幹線の列車・自動車、空中を飛行する飛行機・ヘリコプターなどである。自転車・自動車のタイヤ、列車の車輪、航空機のプロペラが内部軸の周りで回転し、全体は並進運動をしたり、外部軸に対して回転運動をおこなったりしている。

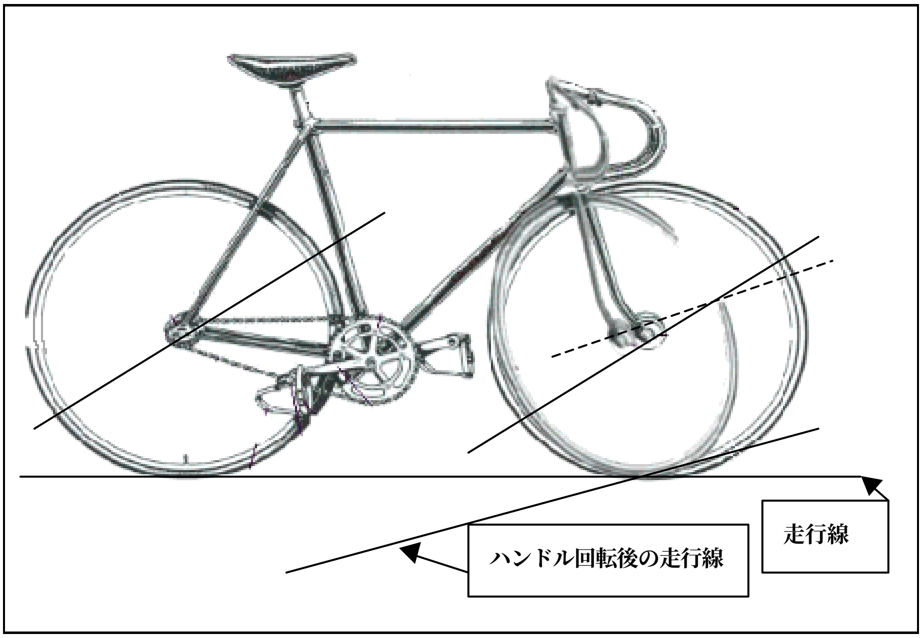


図 1-11 回転軸と回転面

回転運動において、回転面に外力が作用したときには、回転軸が変化し、回転軸を変化させる外力が作用したときは、回転面が変化することが、判明している。

例えば、図 1-11 のように、自転車で走行中に、ハンドルを左方向に回せば（タイヤの回転面を変化させる）、タイヤの回転軸が左方向に傾くために、車体と運転者の主軸が左方向に傾いて、左方向へ自転車がカーブするのに必要な中心力が生じる。また、コマが回転しているとき、コマの回転軸が傾くとき、コマの回転面が変化して、回転軸の傾きはうち消す効果となり、コマは歳差運動を始め、コマの軸は地面に対して円錐形の側面に沿った、軸の回転が行われる。これらの時、自転車やコマの重心に働く重力と、地面からの抗力が、大きさ等しく方向反対で、互いに平行をなしている力、すなわち、偶力の作用を考える必要がある。一度主軸がどちらかの

側に傾き始めると、偶力の作用でますます傾きが大きくなり、タイヤの回転面の変化により、進行方向が変化する。

図 1-12 のように、コマの歳差運動は、重力と抗力の関係が偶力となり、コマを右側に倒そうとするが、コマ上面の回転面が前方へ倒れるように変化し、結果として、回転軸は前方へ動き、次々に連続してこの現象が続く。全体としてみれば、図中の点線で示した矢印の方向へ、回転を行う。

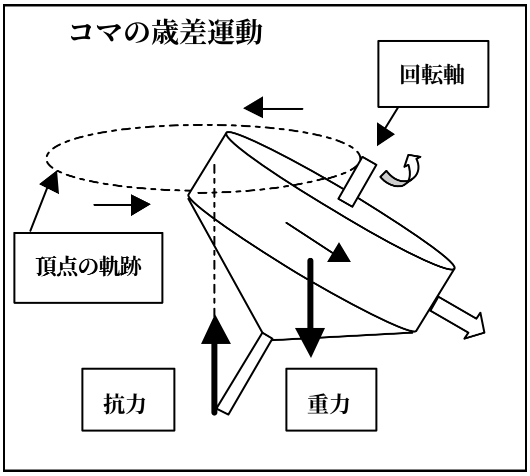


図 1-12 コマの歳差運動

図 1-13 のように、地球の歳差運動は、大洋の海水に対する月・太陽の引力と遠心力の合力が、地球の

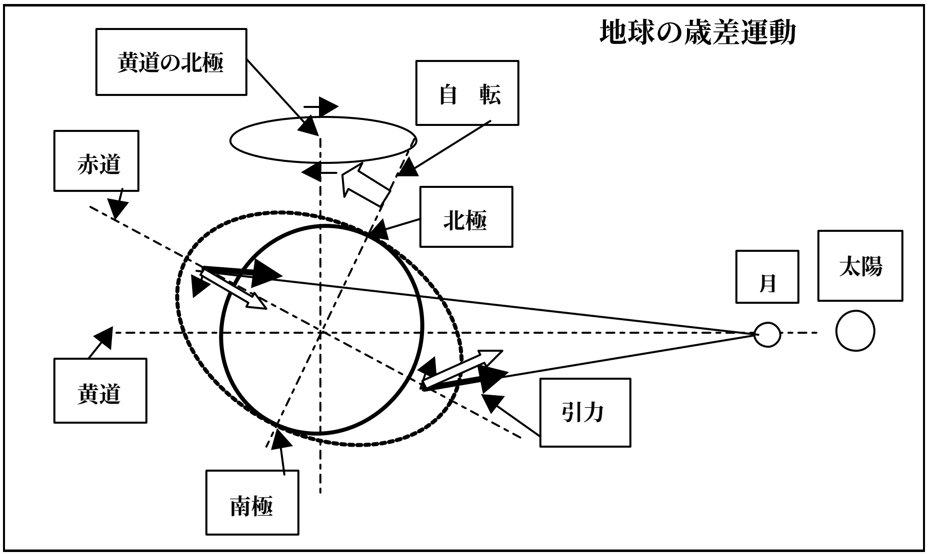


図 1-13 地球の歳差運動

回転軸を黄道の北極に近づける働きをする偶力になっていることより生ずる。コマと地球に対する偶力は、コマでは倒す、地球では起こす方向に働くために、歳差の回転は逆になっていることに注意する必要がある。

第四節　ニュートンの運動の三法則と力の定義

運動の三法則

万有引力による力を地球人は重力と呼び、位置の変化を生じさせる原因としてきた。1687 年、ニュートンは重力と運動に関する研究から、運動に関する法則として、先人が説いた様々な知見を含め、運動の三法則を提唱した。この三法則は、力と運動の関係を総合的に示し、その後の物理学発展に大きく寄与している。ただし、物体の重心の、位置の変化に対する法則であり、位置が変化しない物体について、固定軸の周りの回転運動には適用されない。

第一法則（慣性の法則）
物体に力が作用しなければ、あるいは、多くの力が作用してもその合力がゼロであれば、その物体の重心は、静止し続けるか、もしくは、等速運動を続ける。
第二法則（運動の法則）
物体に力が作用すれば、重心は力の方向に加速度を生じ、物体の質量と加速度との積は力に等しい。
第三法則（作用反作用の法則）
物体 A が他の物体 B に作用すれば（力を及ぼせば）、他の物体 B は物体 A に反作用を及ぼす（力を及ぼし返す）。そのとき、互いの力は方向反対で大きさ等しく同一直線上にある。

慣性系

第一法則は、観測者が静止しているか、等速運動ををしているかの場合に適用され、観測者が加速度運動をするときは、物体に作用する力に、架空の力を導入して検討しなければならない。前者の観測者が、自然現象を

考える場合は慣性系考察と呼び、後者で導入する架空の力を慣性力と呼んでいる。慣性力の例として、エレベーター内の物体に作用する力と運動の解析、固定軸の周りで回転する物体に作用する力、列車内で静止する乗客が、吊り輪の運動を解析する場合などである。

運動方程式

第二法則は、力を F、質量を M、加速度をαとすれば、次式が成立する。

$$F = kMa \qquad 1\text{-}13$$

ここで、物理量の単位を、質量 M に kg、加速度αに m/s^2 を用い、力 F が $kg\cdot m/s^2$ となるように単位系を設定すれば、k=1 とし、通常は次の式となる。

$$F = Ma \qquad 1\text{-}14$$

1-14 式は、通称、運動方程式と呼び、力と運動を表現する等式である。これは、比例式であり、比例定数を質量としている。また、ベクトルでは次の式となる。

$$\vec{F} = M\vec{a} \qquad 1\text{-}15$$

重力加速度

運動方程式の加速度 a は、力 F が地球引力で、質量 M の物体に作用するとき、様々な方法で測定した結果、現在では、大まかな値として、980 cm/s^2 (9.80 m/s^2)を用いている。この値を重力加速度と呼び、地球の引力（重力）が作用するとき、物体の力と運動の関係を記述する重要な物理量である。しかも、物体の質量に関係せず、常に一定である。

ところが、実際には、重力は、地球の引力と地球自転による遠心力との合力として求められるから、地球に対する重力加速度の値は、測定点の緯度・経度、高度、地表面近くの地盤構造などの違いにより、微妙に変化する。理科年表（1991 年版）で、津市での高度 3m における値は 979.71508 cm/s^2 と掲載されている。他の地点では、札幌市で 980.47757、鹿児島市で 979.47215 などである。ここで、力と加速度はベクトル量、質量はスカラー量である。

また、重力加速度の記号は g であるが、質量の記号 g と区別しているので注意を要する。重力加速度である 9.80 m/s^2 は、物体の速さが 1 秒間に 9.80m/s ずつ速くなることを意味し、運動を始めてから 10.0 秒後の速さは、98.0m/s となる。一般に、g＝9.80m/s^2 として、種々の計算に用いられる。

力の単位

いま、重力だけが作用する、物体の運動を考える。質量 10.0kg の物体に重力が作用したとき、受ける力は、10.0kg×9.80m/s^2=98.0 kg•m/s^2 となる。計算された力の単位 kg•m/s^2 を記号で N と書き、ニュートンと呼ぶ。

従って、この場合、98.0 ニュートンの力を受け、加速度が 9.80 m/s^2 生じたと言うことになる。また、質量 10.0g の物体に重力が作用したとき、受ける力は、10.0g×980 cm/s^2=980 g•cm/s^2 となり、g•cm/s^2 を記号で dyn、ダインと呼んでいる。

ここで、1N=980dyn となる換算式ができる。左辺は MKS 単位系、右辺は CGS 単位系として両者を区別している。

MKS 単位系は基本単位として、長さを m、質量を kg、時間を s と定めこれらを組み合わせて、面積を m^2、加速度を m/s^2、力を kg•m/s^2 などの誘導単位を作っている。

また、CGS 単位系は長さを cm、質量を g、時間を基本単位とし、面積を cm^2、加速度を cm/s^2、力を g•cm/s^2 などの誘導単位を作っている。

通常、日常生活の場では、質量 1kg に作用する地球引力の大きさを、1kg 重（1kgw）の重力としているが、運動方程式の計算から 1.0kg × 9.8 m/s^2=9.8kg•m/s^2=9.8N となり、1kg 重=9.8N の換算式が得られる。

以上のように、力の単位には、ニュートンを用いることとなり、1kg 重や、1dyn はすべて、ニュートン単位で表現することになる。

また、後述するが、物体に作用する力には、外力、内力、推進力、張力、抗力、抵抗力、弾性力、摩擦力、浮力、揚力、電気力、磁気力、分子間力など様々な力が存在する。これらの力もすべて、ニュートン単位で示すことになる。

第五節　運動の記述

速度の定義

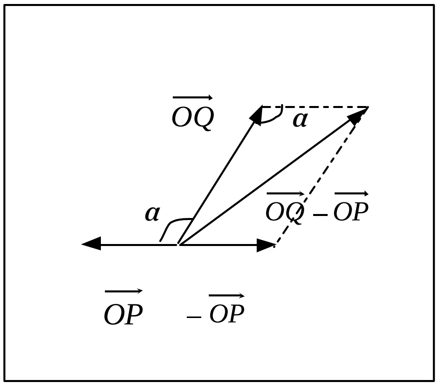


図 1-14　速度

第一節の 1-1 式で示したように、速度は、位置ベクトルの差を、変化に要した時間で除したベクトル量として定義されている。

図 1-14 のように、右辺の分子はベクトルの差であるから、差のベクトルを示す矢の図形から、三角関数を用いて、矢の長さを計算し、それを速度の大きさとする。また、速度の方向はベクトル差の矢の方向とする。

位置を示す動径が、同じ方向で、同一直線上で変化するときは、方向を考慮しなくてよいから、ベクトル差の長さ *OQ-QP* は、引き算で求まり、その長さを、要した時間 T で除した値を V として、速さと呼び、次式で計算する。

$$V = \frac{OQ - OP}{T} \qquad \text{1-16}$$

ここで、速度が同一直線上にあるとき、逆方向の速度を区別するため、座標軸の正負を考え、軸の矢の方向を正、逆を負とし、速さに正負をつけて計算する必要がある。例えば、ある速さで、真っ直ぐで平坦な道路を走っている自動車が、速度を落とし、逆方向へ戻ってきたときに、最初の方向を正とすれば、戻ってくるときを負とする。

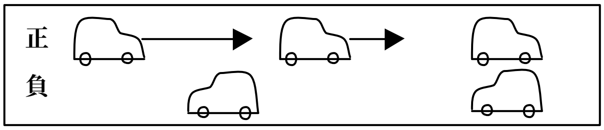


図 1-15　速度の正負

加速度の定義

1-1 式の、右辺の分子 $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ を $\vec{V}_2-\vec{V}_1$ に置換すれば、加速度の一般式が次のように示される。

$$\vec{a}=\frac{\vec{V}_2-\vec{V}_1}{T} \qquad \text{1-17}$$

この式は、ベクトル式のため、図形から三角関数を用いて、$\vec{V}_2-\vec{V}_1$ の長さを計算し、時間 T で除すことで、$\vec{V}$ の大きさが決定され、方向は、$\vec{V}_2-\vec{V}_1$ の方向となる。

方向が一定な直線上を運動する場合の加速度αは、方向を考慮しなくてもよいから、加速度ベクトル$\vec{\alpha}$の→をのぞいたαを、加速度の大きさとし、スカラー量として計算される。従って、次の式となる。

$$a=\frac{V_2-V_1}{T} \qquad \text{1-18}$$

ここで、加速度が同一直線上にあるとき、逆方向の加速度を区別するため、座標軸の正負を考え、軸の矢の方向を正、逆を負とし、加速度の大きさに正負をつけて計算する必要がある。

図 1-16 のように、この例として、鉛直上方に座標軸を導入し、ボールをまっすぐ上に投げあげる場合、重力加速度を負として計算することになる。これとは逆に、鉛直下方に座標軸を導入する場合は重力加速度を正とする。

ここで注意を要するのは、鉛直上方に座標軸を導入し、ボールをまっすぐ上に投げあげる場合には、いつかは、ボールが落下してくるからということで、上昇中は加速度を負、落下中を正としてはならない。座標軸が変えられない限り、正負は同じ扱いをしなければならない。

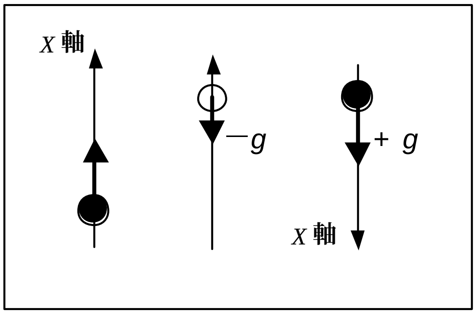


図 1-16 重力加速度の正負

相対運動と相対速度

我々の日常生活は、地球表面のごく狭い領域で、しかも、地球半径 6300km に比べて、鉛直上方 20km の高さまででしか行われていない。このことから、物理学では水平面上での運動を基本に解析し、立体的な運動は特殊な部類として扱っている。

一般に、自然現象を物理学的に観測する場合、観測者は設定した座標軸に対し、静止しているという条件が必要である。

図 1-17 のように、水平な地面上で、自動車と単車が思い思いに走行するとき、両者の速度を$\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ とすれば、自動車の観測者が自転車の運動を見たとき、運動を相対的に見るという。この場合、自動車の観測者に与えられている速度$\vec{V}_1$ をゼロとして考え、この観測者が見る単車の相対速度は、「 観測対象の速度－観測者の速度 」で求められるから、$\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ となる。

従って、両者の運動方向が異なるとき、ベクトル計算が必要であり、同一直線上の運動の場合は、正負をつけた速さの加減計算を行うことになる。

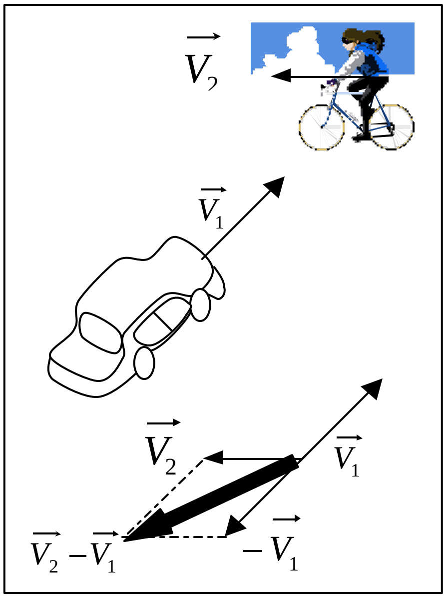


図 1-17 相対速度

立体的運動の場合も同様に扱えばよい。ただし、三次元の X,Y,Z 座標を導入し、速度ベクトル$\vec{V}$ は、その成分 Vx,Vy,Vz、で処理する必要がある。

加速度の大きさの公式と図形表現

加速度の公式 1-17 は、式を変形すると次の式となる。

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{a}T \qquad 1\text{-}19$$

この式は、時間 T 後の速度は、最初の速度ベクトルと生ずる加速度ベクトル α のスカラーT 倍のベクトルの和であることを示す。また、加速度の大きさの公式 1-18 を変形すると次の式となる。

$$V_2 = V_1 + aT \quad 1\text{-}20$$

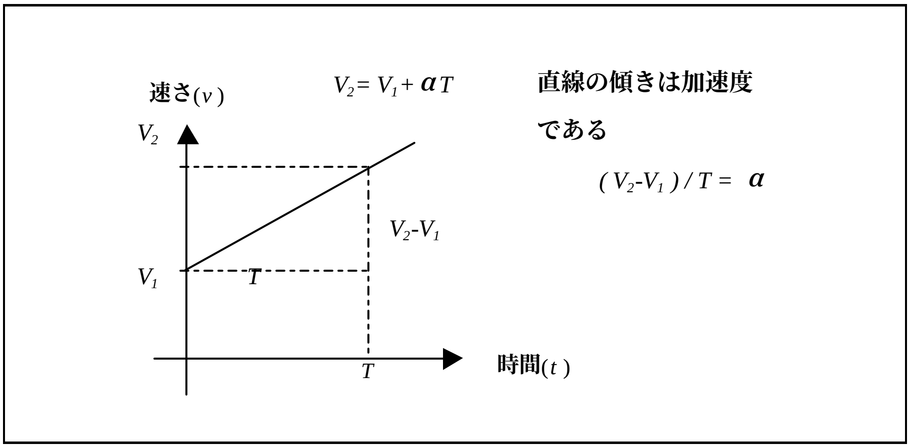


図 1-18 等加速直線運動

このスカラー計算式を図形で表現すると、図 1-18 となる。この図のグラフは直線となり、その傾きは

$$\frac{V_2 - V_1}{T} \quad 1\text{-}21$$

だから、この式は 1-18 式から α に等しい。従って、加速度運動をする物体のグラフから、加速度が直線の傾きとして求められることを示す。

等加速度直線運動

加速度が一定な運動は、重力による鉛直線にそった落下運動や、同一直線上を走行する交通機関などで見られる。これは、単位時間中に速さの増減が同じ運動であるといえる。

図 1-18 の図形の面積を考えると、時間 T の間に走行した距離が求まる。すなわち、距離を S とすれば、S =長方形 S_1 の面積+三角形 S_2 の面積であるから、次の式となる。

$$S = V_1 T + \frac{(V_2 - V_1)T}{2} \quad \text{1-22}$$

この式の V_2 に、1-20 式を代入し整理すれば、次の式が得られる。

$$S = V_1 T + \frac{aT^2}{2} \quad \text{1-23}$$

さらに、1-20 式と 1-23 式から T を消去すれば、次の式が得られる。

$$V_2{}^2 - V_1{}^2 = 2aS \quad \text{1-24}$$

ここで、1-23 式から、走行距離 S は時間 T の二次関数となり、S と T を直交座標軸としてグラフを描けば、放物線となることがわかる。また、1-24 式は、時間 T を含まぬ場合の式であることを示す。

ここで、等加速度直線運動を解析する式として、次の三式を公式とする。

$$V_2 = V_1 + aT \qquad S = V_1 T + \frac{aT^2}{2} \qquad V_2{}^2 - V_1{}^2 = 2aS \quad \text{1-25}$$

一般に、等加速度直線運動の公式 1-25 を、図形で表現するならば、V-T グラフ、S-T グラフ、a-T グラフの三種類が描ける。物理量は、図形の面積やグラフの傾きなどで求められる。

重力の作用による落下運動

流体内で運動する物体には、重力の他に、推進力、抵抗力、重力をうち消す抵抗力、ランダムな外力などが作用している。これらの作用を総合的に考慮して運動を解釈しようとすると、初等数学では無理なことが多く、一般には、最初に、重力だけが作用する（他の力は無視する）ときの運動を考える。そのときの運動を落下運動と呼び、次の五種類に分類して、基本的法則を導き出している。

1，自由落下運動（初速度がゼロで、静かに落下する）

2，鉛直投げ下ろし運動（ゼロでない初速度で、鉛直下方に投げ下ろす）

3，鉛直投げ上げ運動（ゼロでない初速度で、鉛直上方に投げ上げる）

4，水平投射運動（ゼロでない初速度で、水平方向に投射する）

5，斜め方向投射運動（ゼロでない初速度で、斜め方向に投射する）

第四節の重力加速度の項で示されているが、質量 M の物体に、地球の引力 F が作用するとき、生ずる加速度 a について、運動方程式 1-15 が成立し、加速度の大きさ a は 1-14 式で計算される。このとき、この加速度 a は重力加速度と呼び、記号で g と書き、その値は $9.8m/s^2$ である。

一般に、質量 m の物体に作用する重力の大きさは、mg であると認識しておけばよい。従って、質量 $60kg$ の人に作用する重力は、$60kg \times 9.8m/s^2 = 588\ kg\ m/s^2 = 588N$ となる。

落下運動は、重力だけが作用すると規定したから、物体の運動状況は、初期条件によって、一義的に確定する。いま、運動を解析するために、第五番目の斜め方向投射運動を考え、直交座標軸 X-Y を導入する。この軸は、紙面に沿った、鉛直平面であることは言うまでもない。X 軸は水平方向で右へ正、Y 軸は鉛直方向で、上方へ正とする。

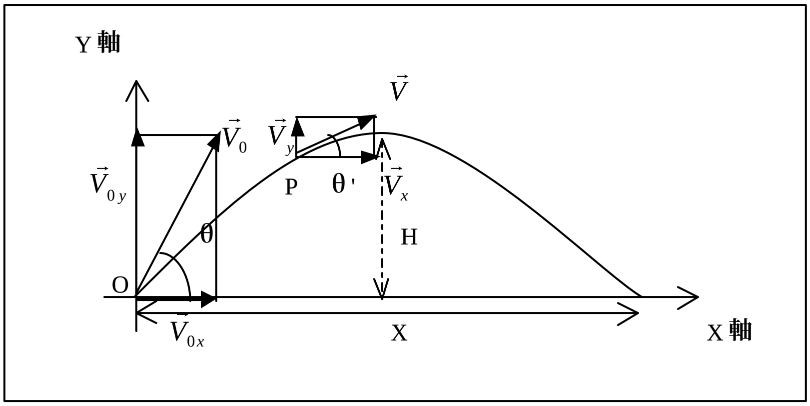


図 1-19 放物運動

図 1-19 のように、いま、原点 O で、質量 m の小物体を、X 軸となす角度 θ で、右斜め上方へ、初速度 $\vec{V}_0$ で投射する場合を考える。投射後、時間 t の位置 P(x,y)における小石の速度を $\vec{V}$ とし、X 軸となす角度を q 、原点 O と P 点での X 軸、Y 軸方向への分速度をそれぞれ、$\vec{V}_{0x}, \vec{V}_{0y}, \vec{V}_x, \vec{V}_y$ とする。さらに、最高点まで上昇する時間を t' 、そのときの高さを H、X 軸上での到達距離を X とする。

重力のみが作用する落下運動は、X 軸、Y 軸方向に分けて考えることが

でき、*X* 軸方向では、重力の方向と垂直であるために、重力の作用を無視し、加速度がゼロの等速運動と考える。また、*Y* 軸方向は重力の作用をうけ、重力加速度を適用した等加速度運動と考える。

従って、*X* 軸方向では、

$$V_x = V_{0x} = V_0 \cos\theta \qquad \text{1-26}$$

$$x = V_{0x}t = V_0 \cos\theta t \qquad \text{1-27}$$

Y 軸方向では、1-25 式の第一と第二式に、a=-g、V_2=V_y、V_1=V_{0y}、S=x と置換すれば

$$V_y = V_{0y} - gt = V_0 \sin\theta - gt \qquad \text{1-28}$$

$$y = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = V_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{1-29}$$

となる。 また、P 点の速さ *V* と角度 θ'は、

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = \sqrt{V_0{}^2 - V_0 gt \sin\theta + g^2t^2} \qquad \text{1-30}$$

$$\theta' = \arctan\frac{V_y}{V_x} = \arctan(\tan\theta - \frac{gt}{V_0\cos\theta}) \qquad \text{1-31}$$

となる。ここで、1-27 式と 1-29 式から *t* を消去すれば、

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2V_0{}^2\cos^2\theta} \qquad \text{1-32}$$

が導かれ、この式は、この小球の軌跡を示す方程式となり、一般に放物線と呼んでいる。

1-28,1-29 式は θ=90°の場合、V_0=0 であれば、自由落下運動の式となり、V_0≠0 であれば、鉛直投げ上げ運動の式となる。また、θ=270°の場合で、V_0≠0 であれば、鉛直投げ下ろし運動の式となる。

1-26～1-32 式で、θ=0°の場合は水平投射の式となる。この場合は、

$$V_x = V_{0x} = V_0 \qquad x = V_{0x}t = V_0$$

$$V_y = gt \qquad y = 1/2\,gt^2$$

となる。

第六節　二つ以上の物体間における力の相互作用

床とその上の物体

地球が月を引力で引けば、月もまた同じ力で引いていることは、第三節で記述しているが、日常生活でも、物体同士の相互作用が多く見られる。図 1-20 のように、水平な床に立方体の石材が置かれている場合を考える。

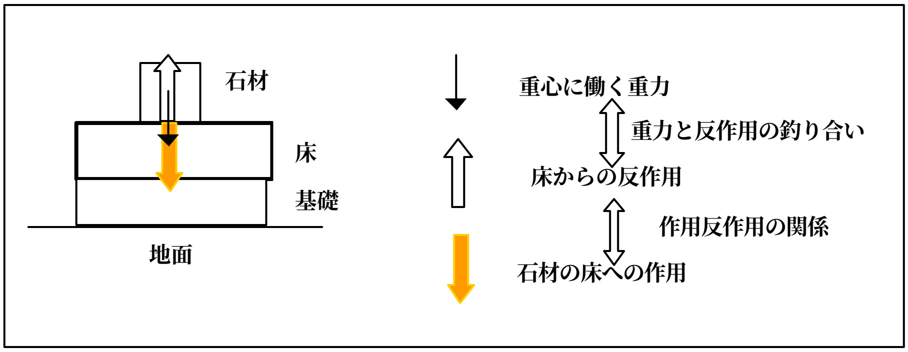


図 1-20 作用・反作用の法則

石材の質量を M とすれば、地球から Mg の重力を重心に受け、石材が、床を鉛直下方に押しつける。第四節の、運動の第三法則から、床が石材から受ける作用に対し、同じ大きさの、反作用の力を及ぼし返すことになる。従って、石材には、重力 Mg と反作用の力 Mg が作用し、二つの力が、方向反対で同じ大きさのため、互いにうち消しあい、石材は静止していることになる。

床は、床を支える基礎との間で、同様の状況があり、静止している。基礎はまた、地面の土と、同様の状況が説明されるが、もしも、その土が、何らかの原因で流失すると、作用反作用の関係が、成立しなくなり、基礎は下方へ落下し、床も落下し、最後に石材も落下する。

図 1-21 のように、多くの物体が接触し、あらゆる方向について、全体として静止しているか、あるいは、等速度運動をしているときは、各物体の間には、作用反作用の関係が成立している。この場合、個々の物体に着

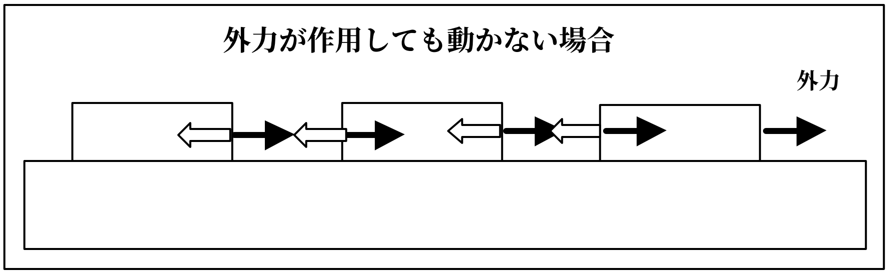


図 1-21 静止する連結体

目せず、全体として考える場合は、各物体間の作用反作用の力を内力と呼び、物体外からの作用である外力と区別している。図 1-22 は、外力の合力に対して、加速度が生ずる場合は、内力が無視できず、全物体の総質量との関係と、個々の物体の質量との関係を、別個に、考えなければならない。

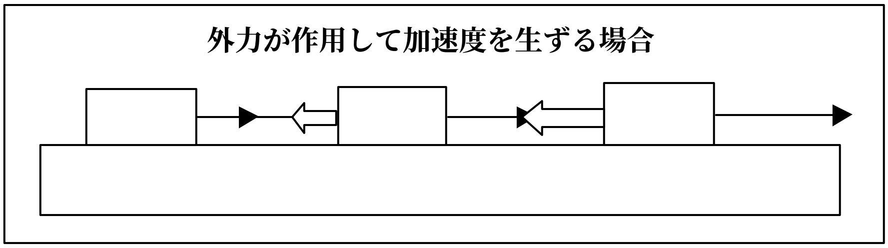


図 1-22 加速する連結体

これらの例は、電車の走行を考えるときに必要である。外力の合力は、重力、モーターの推進力、流体の抵抗力、レールからの反作用による抗力、レールと車輪の間の摩擦力、車輪への制動力などを合成して求められる。どの物体も、重力とレールからの抗力が、釣り合っているので、残りのモーターの推進力、流体の抵抗力、レールと車輪の間の摩擦力、車輪への制動力との関係になる。推進力が抵抗力と摩擦力および制動力の合計よりも大きいときは、前進方向に加速度が生じ、速度が増加する。逆に、小さいときは、速度が減少する。

重力以外の力を考慮する場合には、さらに、物体の形状を考えなければならないから、解釈は相当複雑になる。すなわち、物体の回転運動が関係するからである。しかし、実際の日常現象に発生している物理的な出来事は、すべての外力や形状を無視しては、解釈できない。

斜面上の運動（スキー競技）

スキーというスポーツは、斜面上を滑るものであることは、誰でも知っていよう。ところが、物理学的に解釈しようとすると、水平面や、鉛直面での運動よりも、特殊なことを考慮する必要がある。

いま、図 1-23 のように、斜面を滑走するスキーヤーの質量を m とし、斜面の水平に対する角度をθとすれば、重力を斜面に垂直と水平方向に分解すると、斜面からの反作用による抗力の関係が、図示したようになる。

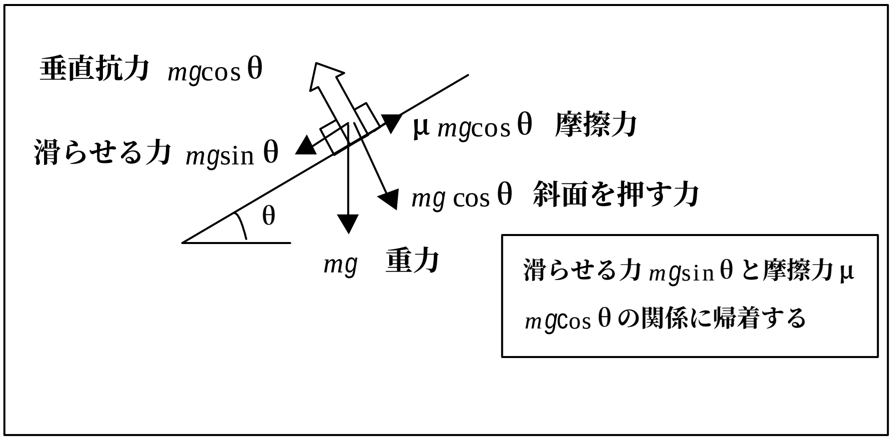


図 1-23 斜面上の運動

重力の分力である、垂直抗力 $mg\cos\theta$ と、斜面を押す力 $mg\cos\theta$ は、釣り合っているので、互いにうち消し、滑らせる力 $mg\sin\theta$ と、摩擦力 $\mu mg\cos\theta$ の関係に帰着する。従って、スキーヤーが、滑り始める瞬間までは、滑らせる力 $mg\sin\theta$ と、摩擦力 $\mu mg\cos\theta$ が等しく、次の式が成り立つ。

$$m = \tan q \tag{1-33}$$

このμは、静止摩擦係数といい、このときの斜面の角度θを摩擦角と呼ぶ。また、この式は、面を接する二物体の間の静止摩擦係数を測定するものとされている。

角度が摩擦角よりも大きくなると、物体は $mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$ の力を受け、斜面下方へ滑りだす。そのときの、加速度の大きさαは次の式となる。

$$a = g(\sin q - m\cos q) \tag{1-34}$$

斜面上の運動の解析は、斜面上方に X 軸、それに垂直上方へ Y 軸を導入し、初速度を X 軸の正方向に設定して、加速度を－ a とすれば統一的に扱える。その後の、数学的な処理は、1-25 式を適用すればよい。

固体間の摩擦力

固体間の摩擦力は、大きさの順に記述すると、静止最大摩擦力、摩擦力、滑り摩擦力、転がり摩擦力となる。

摩擦力の原因は、接着剤の研究などから、今日では、凝着説が定着している。凝着説では、接触する固体の、分子構造同士が互いに入り組み、 それを引き剥がそうとするとき、分子同士の衝突などによる、高熱の発生による癒着を分断するときの、応力が摩擦力であると説明している。 これにより、摩擦力が抗力に比例することや、転がり摩擦力も説明できる。

流体の摩擦力は、流体粒子によるものであり、粘性抵抗と呼ばれているが、流体と固体との間の場合でも凝着説で説明できる。

スキーでは、スキーのソリと雪面との間の摩擦力が大きな意味を持っている。ソリの裏面にワックスを塗布するのは、摩擦力を減少させるためであることは言うまでもない。斜面上でスキーヤーが回転できるのは、ソリのエッジの効果や、両腕とストックの慣性モーメントと回転体の運動に関する基礎原理で説明できるが、ここでは説明を割愛する。

空気抵抗

斜面を滑走するスキーヤーには、抵抗力として作用する摩擦力の他、空気から及ぼされる抵抗力として、造波抵抗、渦抵抗、粘性抵抗、風圧などが作用する。造波抵抗は、空気を押しのけるときに発生する気流振動であり、渦抵抗は、スキーヤーの後方に発生する渦流が関係し、粘性抵抗は、空気粒子との摩擦力、風圧は、空気流が直接スキーヤーに衝突する時の、動圧力である。

スピードを競う競技種目では、抵抗力を減少させる工夫が必要となり、

科学的な研究が盛んに展開されている。大まかには、スキーヤーの滑走姿勢、競技用具、潤滑剤、スキーウエア、気象条件などの研究テーマに分類される。

滑り摩擦力と運動方程式

斜面上で、スキーヤーが滑走している間の摩擦力は、滑り摩擦力となり、摩擦係数は滑り摩擦係数となる。それを、μ'とすれば、斜面の角度をθ'、質量を m、摩擦力を含めた、各種抵抗力の合力の大きさを、斜面上方への分力を F としたとき、スキーヤーの運動方程式は次の式となる。

$$-F = mg(\sin\theta' - \mu'\cos\theta') \qquad \text{1-35}$$

この式から、角度がだんだん大きくなり、90°となった瞬間では、

$$F = -mg \qquad \text{1-36}$$

となり、重力を抵抗力がうち消すために、鉛直方向の加速度はゼロとなり、外力がゼロの状態になるが、その後は重力の作用で、角度がゼロになった瞬間の滑走速度で、鉛直に投げ下ろす運動となる。

もしも、スロープが角度θ"のとき、突然途切れたとすれば、その後の運動は、斜め方向投射運動となり、1-26～32 式を、θ=180°+θ"と置換し、V_0=途切れた瞬間のスキーヤーの速度、として方程式を立てるとよい。

ジャンプ競技

ジャンプ競技は、前述の場合と似ているが、角度が緩やかに減少し、任意の曲面を経て、水平面になるスロープを、ジャンパーが、水平面となす角度θの方向に、初速 V_0 で飛び上がるが、この運動はまさしく、斜め方向投射運動に他ならない。もっとも、滑走競技の固体間との摩擦力を除く、各種抵抗力が関係することはもちろんであるが、空中を飛行するため、あらたに、空気からの浮力と、揚力を考慮しなければならない。

ジャンパーには、重力と各種抵抗力、浮力、揚力、風力などの外力が作用し、空気の温度、密度、風の方向、ジャンパーが形成する姿勢の全容積、

形状なども関係する。従って、ジャンプ競技の物理的研究は、相当困難を伴い、危険をはらむこともあり、競技人口の増加は、必ずしも思わしくない。極端に言えば、ジャンパーの度胸と繰り返しの練習及び、気象条件の予知など、科学的に解明されない部分が残されていると言えよう。

曲面からの垂直抗力と離脱

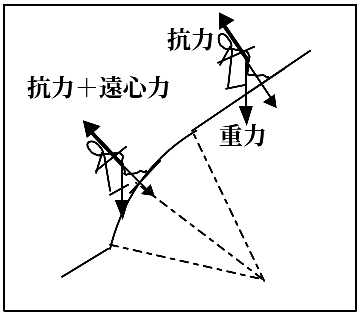


図 1-24 ジャンプ

図 1-24 のように、スキーヤーが、角度が徐々に大きくなるスロープを、滑走するとき、スロープ面から、スキーヤーが雪面を蹴らずに自然に離脱し、空中に飛び出すとき、スロープからの垂直抗力が関係する。すなわち、その抗力がゼロとなるときに、離脱が起こる。直線のスロープの場合は、垂直抗力は、重力の分力で求まるが、曲面では、物体の進行方向が変化するために、回転運動をする物体の遠心力が関係し、重力による垂直抗力と遠心力とが同じになったとき、全体としての抗力がゼロとなり、離脱の原因となる。

スロープに凹凸がある場合、雪面の滑走とジャンプ競技の空中飛行が競技中様々な状況で変化するため、競技場の別や、滑走するコースによっても、同じ選手でありながら、そのタイムは様々に変動する。

斜面上の互いに運動する二物体の相互運動

図 1-25 のように、水平となす角度θの斜面上に、質量 m_A の物体 A と、さらにその上に、質量 m_B の物体 B が置かれていて、物体 A には、質量を無視し、伸び縮みしない紐で、斜面と平行に上方へ、定滑車を通じて引かれている。定滑車の鉛直下方の紐には、質量 M の錘（おもり）が結ばれている。

斜面と物体 A との摩擦係数を μ_A、物体 A と物体 B との摩擦係数を μ_B、とし、斜面下方に X 軸、それに垂直に Y 軸を導入する。ぴんと張られた紐の両端における、物体に作用する張力は等しく、物体 A には、錘に作用す

る重力 Mg が斜面上方に作用している。

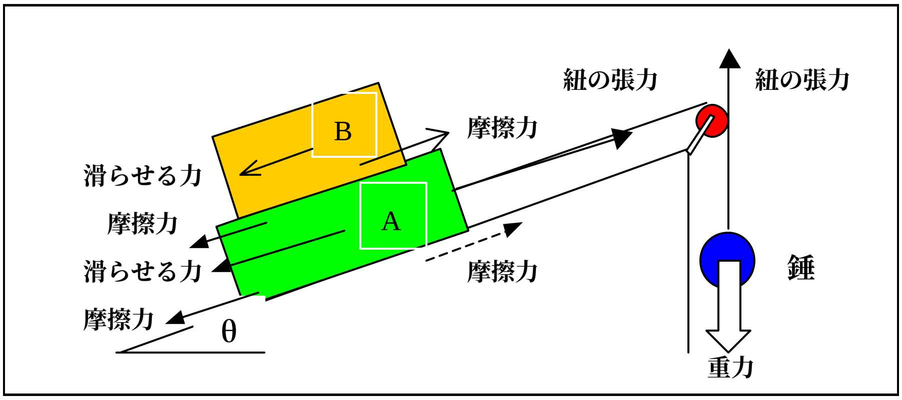


図 1-25 斜面上の連結物体

物体が、重力 Mg に引かれて斜面上方へ運動するとき、物体 A、B、錘の運動を考える。物体 A には、斜面からの摩擦力 $\mu_A m_A g\cos\theta$ が斜面下方へ抵抗力として作用し、物体 B は、A からの摩擦力 $\mu_B m_B g\cos\theta$ により、斜面上方へ動かされようとしている。さらに、両物体には、重力の分力である斜面下方へ滑らせる力が、それぞれ、$m_A g\sin\theta$ と $m_B g\cos\theta$ が作用している。

物体 A、B は、斜面上方へ加速度 α_A, α_B で運動するとして、運動方程式を求めると、それぞれ次の式となる。

$$T - m_A g\sin q - m_A m_A g\cos q - m_B m_B g\cos q = m_A a_A \qquad 1\text{-}37$$

$$m_B m_B g\cos q - m_B g\sin q = m_B a_B \qquad 1\text{-}38$$

錘には、重力 Mg が鉛直下方へ、紐の張力 T が上方へ作用するから、その加速度を α とすれば、運動方程式は

$$Mg - T = Ma \qquad 1\text{-}39$$

となる。

物体 A に作用する紐の張力 T の大きさにより、物体 B の運動は物体 A とともに動く場合、斜面には上方だが、物体 A には下方へ動く場合、に分かれる。加速度では、前者は $\alpha_A = \alpha_B$、後者は $\alpha_A > \alpha_B$ である。

そのことを実際に行ってみるには、錘で紐を引くのではなく、紐を手で、いろいろな速さで引いてみると、ゆっくり引けば前者、速く引くと後者となる事が観測できる。これは紐を引く速さは力に比例しているからである。

水平面上の二物体の相互運動（地震動と建築物）

前述の角度θをゼロとすれば、水平面上の二物体の運動が記述できる。二物体に作用する重力は抗力と釣り合うため、無視できるから、次の式が成り立つ。

$$T - m_A m_A g - m_B m_B g = m_A a_A \qquad \text{1-40}$$

$$m_B m_B g = m_B a_B \qquad \text{1-41}$$

$$Mg - T = Ma \qquad \text{1-42}$$

この例としては、子供時代に見せられた、ダルマ落としである。手で引く代わりに、金槌でたたいてダルマ落としを行うのである。

阪神淡路大震災で、多くの建造物が倒壊したが、地震による地面の震動を、物体 A に作用する力 T が周期振動波の力と考え、建築物を物体 B とし、地面と寺院や木造家屋などの建築物との、相互作用を考察できる。

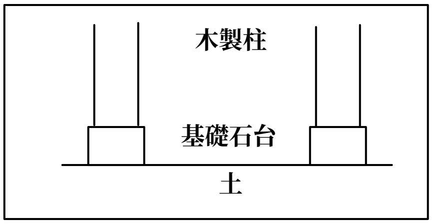


図 1-26 基礎石台

図 1-26 のように、寺院や伝統的な木造建築物は、構造物全体を支えるすべての支柱が、基礎石台の上に載せられており、地面や基礎石台とは接触しているが連結されていない。

寺院建築のいずれもが、数百年以上も地震や台風の力に耐えて現存しているのは、どこに秘密があるのだろうか。

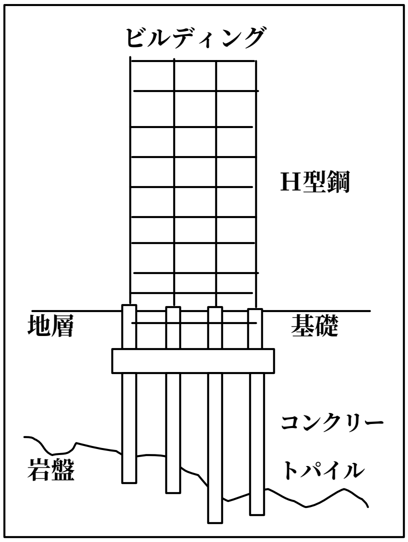


図 1-27 固定基礎

図 1-27 のように、今日の人工構造物は、ほとんどが、地面にがっちりと構築された、鉄筋コンクリートを主とした基礎に固定されている。この場合、地震動による力をまともに受けるため、構造体全体の重力に耐えるだけでなく、振動力に対する強度も、高めなければな

らない。

　阪神淡路の場合、それらの建築法で作られた、高層ビルや大規模マンションが、脆くも破壊され、多大な損害をもたらせた。高速道路の脚橋が根元から折れ、数百メートルも倒壊したことは、記憶に新しい。

寺院建築物が地震に強い理由

　第四節で記述した、運動方程式の質量 M は、外力に対する動きにくさを示す量でもあり、この考えによる質量を慣性質量と言う。従って、質量の大きな物体ほど動きにくいことを示す。

　図 1-28 のように、基礎石台に乗っている寺院の支柱は屋根を含む上部構造の大きな重量を支え、その重量は、地震動の作用に対する寺院の運動を極力抑える働きをしている。これは、地震計の原理として用いられている。

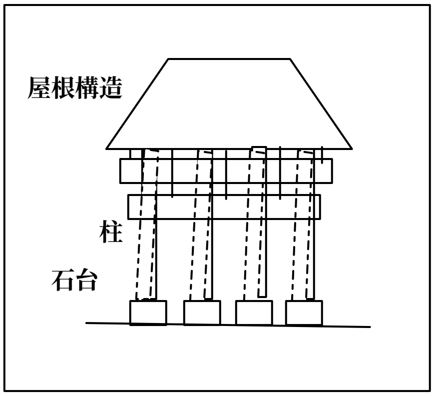


図 1-28　寺院建築

　また、図 1-29 のように、野球のバットのグリップを最下端にして垂直に立て、グリップをつかんで、素早く左右に動かしても、バットの上部の太い部分に存在する撃心部分は、動かないことが観察される。

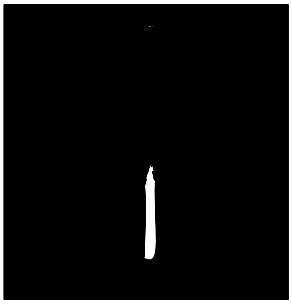


図 1-29　撃心

　基礎石台を含む地面全体が、地震動により左右に動かされたとき、支柱に作用する力は、支柱と石台の間の静止最大摩擦力のみであり、しかも、支柱が滑り始めると、静止最大摩擦力よりも小さな滑り摩擦力の作用に変化するので、支柱の石台からズレる量は大きくなる。しかし、地震動の周期波としての周波数はたかだか 1、2 秒近くであるから、地面が左右に連

続して動いても、左右へのズレが相殺されて、地震が終息した後の、石台からのズレは僅少にとどまる。

寺院の構造は、釘や金具を使用せず、接合部は、木材どうしの組み合わせ構造とされており、全体として柔構造を形成していることと、前述のように、上部構造の慣性質量が大きいこともあり、支柱からの地震のエネルギーは、上部に伝わる間に分散・吸収され、天井や屋根の部分への決定的なダメージを防いでいる。

木造建築物の高さ限界と超高層ビルの構造

現存する寺院や神社などで、その高さは、約 30 メートルを越える場合が少なく、ビルの 5、6 階の高さが限界であることが推測できる。

構造からみた、ビル建築の変遷を見ると、支床構造、剛構造、柔構造、免震構造である。

支床構造は、主に木材の柱・梁・筋交い、剛構造は、重量で強度を保つ鉄筋コンクリート、柔構造は、地震のエネルギーを、柳の木のように受け流す、柔軟な動きが可能な軽量鉄骨を、主たる構造材として用いている。

免震構造は、地震動の作用を極力減少させるもので、地面と支柱の間にダンパーを挿入し、ダンパーで横振動を吸収する方法や、ビルの屋上に水槽を作り、地震時の振動を水槽の水の揺れによって相殺するように、設計されている方法などがある。図 1-30 のように、超高層ビルの構造は、地下数十

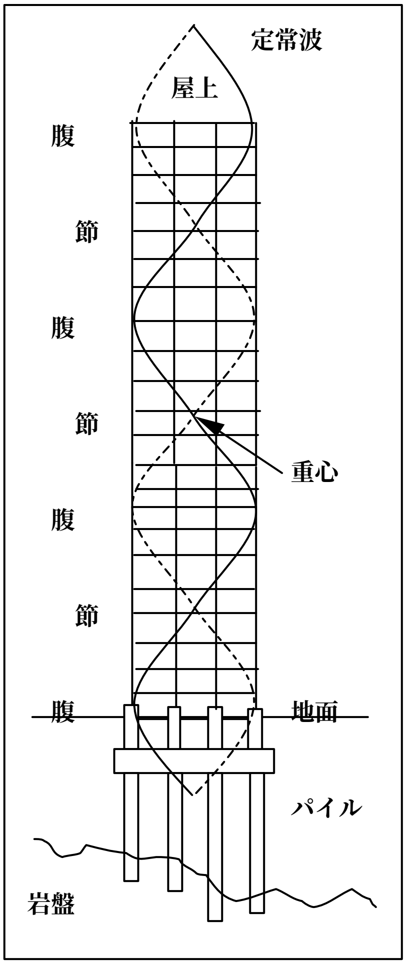


図 1-30　超高層ビル

メートルの岩盤に基礎杭とするパイルを打ち込み、その上部から鉄筋コンクリートの基礎を構築し、軽量鉄骨を接合して、数百メートルの高さまで建築している。この場合、地震動の周期波がビル構造にもろに伝搬し、ビルには、周期的作用が加えられるため、定常波が発生し、各階ごとの振動が異なり、コンピュータシミュレーションの手法で、各種物理量を計算して設計している。ビルの各室内に置かれる道具・家具などは、すべて床や壁に固定され、地震時の揺れで動き回るのを防いでいる。それは、振動に逆らわず、エネルギーを発散させる柔構造の宿命である。

支柱を地面に固定するか否か、あるいは、柔構造か免災構造かは、その建築物の用途、地震動の大きさや地盤、地質構造、容積などの要素を、総合的に検討して、構造を決定しなければならない。

従来の建築物に比べ、今日では、地域環境や情報化社会、都市計画、内部で働く人々の生活環境、廃棄物処理などの、新しい観点が要求される。建築工学は、それらの観点を取り入れ、構造系、設計系の二分野に、さらに、設備系として一分野をおき対応している。また、自然災害に対応する新たな、建築基準の改定も望まれている。

第七節　固定点を中心とする質点の円運動

水平面で、紐につけられた物体の回転

図 1-31 のように、点 O を中心として、伸び縮みしない、長さ r の紐につけられた、大きさを無視した質量 m の物体を、等速 v で回転させた。この運動は円運動と呼び、速度は時々刻々変化するが、円の接線方向に同じ速さで回転する。一回転する時間を周期と呼び、T で示すと円周は $2\pi r$ だから、回転の速さ v は、

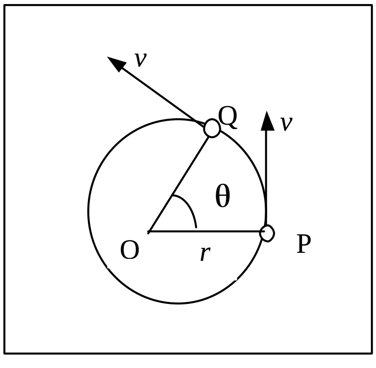


図 1-31 等速円運動

$$v = \frac{2pr}{T} \qquad \text{1-43}$$

となる。ここまで、長さと時間で速さを考えてきたが、回転運動では、回転角を考えることが必要になる。

いま、任意の点 P で時刻の測定を始め、Q 点まで回転する時間 t の間に、回転角度がθになったとすれば、角度に関する速さとして、角速度を考え、記号ωを用いて、次の式で示す。

$$w = \frac{q}{t} \qquad \text{1-44}$$

この式から、角度θを、θ＝ωt として、角度を時間の関数として表現し、微分や積分などの数学的な手法を、用いやすいようにしている。

角度には、一回転の角度を 360°とし、1°以下は 60 進法とする、度・分・秒を用いる度数法と、半径 r に等しい弧の長さになったときの角度をπラジアン（ 記号で *rad* ）とする方法がある。πは円周率と呼び、この値は電子計算機によって、数億桁まで求められており、通常は 3.1415…としている。ラジアン単位は 10 進法であるから、物理学でよく用いる。これらの換算式は、360°=2π*rad* である。電子計算機では、三角関数を計算するとき、度数法は *DEG* モード、ラジアンは *RAD* モードとして設定してあるから、モード変換をしなければならず、注意を要する。

一回転について、1-44 式を考えると、θ=2π、t=T として

$$w = \frac{2p}{T} \qquad \text{1-45}$$

となる。この式は、角速度ωを周期 T を用いて示すが、振動現象や周期関数で表現される波動現象の解析に、多用されるので、重要である。

さらに、この式と、1-43 式から T を消去すれば、次の式が求められる。

$$v = rw \qquad \text{1-46}$$

この式は、回転運動における速さ v と、角速度ωとの換算式である。

向心加速度と向心力

図 1-32 のように、等速円運動の場合でも、各点における速度を考えると、速さが同じでも、方向が変化し、加速度を考えなければならない。この加速度を向心加速度と呼び、通常の加速度を接線加速度と呼んで、区別している。この向心加速度α′の大きさは、

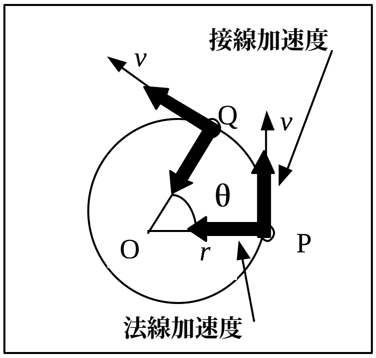


図 1-32 向心加速度

$$a' = \frac{v^2}{r} \qquad 1\text{-}47$$

となり、その方向は、常に中心 O に向かっている。従って、この、向心加速度は、円運動をするどの点においても、接線方向に考える速度と、直角方向で中心向きである。回転する物体の質量は m であったから、この物体に働く力を F' とすれば、

$$F' = ma' = m\frac{v^2}{r} \qquad 1\text{-}48$$

となる。この力を、向心力と呼び、紐が常時、中心向きに作用している力であることは、容易に解るであろう。この力の存在により、物体の進行方向が円周に沿って、変化してゆくことになる。月が、地球の周りに、円軌道を描いて回転しているのも、地球の引力が、この向心力となっているからである。

曲率半径と単車走行

図 1-33 のように、曲がっている道路でも、ごく近い範囲では、曲率半径 R の円軌道と見なせる。いま、このカーブを、速さ V で二人乗りの単車

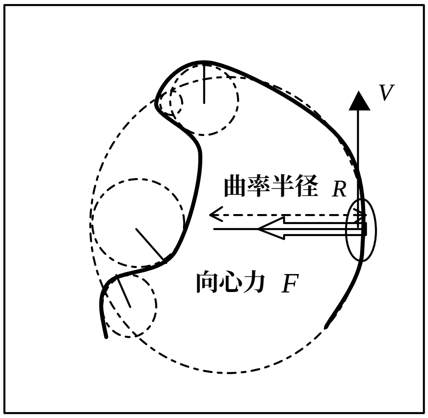


図 1-33 曲率半径

が、安全に走行するための条件を考える。

単車でドライブウェイを走行するとき、自分一人が運転するときでも、カーブを曲がりきれず、ヒャッとすることがある。まして、後ろに人を乗せる場合はなおさらである。

単車の質量を W、運転手の質量を M、同乗者の質量を m、必要な向心力を F とすれば、1-48 式により、次の式が求まる。

$$F = (W + M + m)\frac{V^2}{R} \qquad 1\text{-}49$$

この式から、V を一定としたとき、向心力 F と、曲率半径が反比例、向心力 F と、全質量（$W+M+m$）は比例関係にあることが解る。

また、曲率半径 R の式は

$$R = (W + M + m)\frac{V^2}{F} \qquad 1\text{-}50$$

となり、半径 R は質量 m の増加分である mV^2/F だけ大きくなるから、同じ半径のカーブを、正常に曲がるためには、速さ V を小さくするか、向心力 F を大きくしなければならない。

ここで、向心力 F は単車や交通機関の場合、その力を生み出す車体の傾きが、絶対的に必要である。これは、図 1-34 のように、重心に作用する重力の、車体に沿った方向への分力が、地面に作用し、その反作用が車体に作用し、それと重力の分力との合力が、向心力となる。車体の傾きによる向心力は、その傾き角の関数であり、次の式で示される。

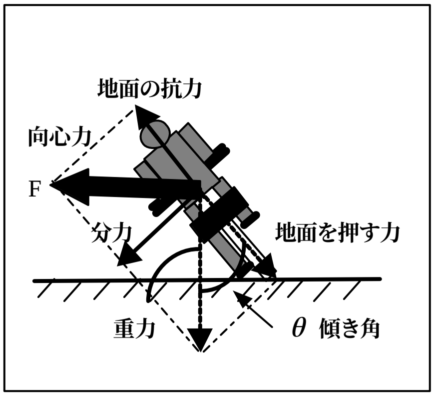


図 1-34 単車の向心力

$$F = (W + M + m) g \tan q \qquad 1\text{-}51$$

この傾きは、運転者が体の動きで作り出すが、同乗者が運転者と離れていることが多く、運転者が作る傾きを、怖さのあまりうち消す方向へ戻すことになり、必要な傾きが得られない。

すなわち、曲率半径が大きなカーブを回転せざるを得なくなり、曲がる方向と逆方向へ進み、ガードレールに激突するか、または、無理に傾きを作ろうとして、タイヤと地面との間の、滑り摩擦力の限界を超え、スリップし事故となる。

通常一人で、十分曲がり切れているカーブを、同乗者を乗せて走行するときは、傾きよりも、速さ V を小さくした方が安全である。それは、曲率半径は速さの 2 乗に比例するから、速さを半分にすれば、半径は四分の一となるからである。一般に、時速 $60km$ でカーブを曲がるとき、$20km$ だけ減速すれば、二人乗りの場合、安全であるとされている。

自動車や列車の傾きは、現在、ほとんどの場合、自動車では、路面自体に傾きをもうけ、列車は、左右のレールの、水平面からの高さを違えて、作っている。高速道路や、高速列車ではこれらの工法が取られていて、安全性が追求されているが、一般の道路では、山間地や生活道路に、まだまだ、平坦な道路が多く、特に、傾きをつけにくい市街地での道路事故も多く発生している。要は、カーブに来たら、速さを 4 割落とせ、と肝に銘じることであろう。

慣性系と遠心力

図 1-35 のように、地面に静止している観測者が、回転する物体を考えるときは、向心力を用いるが、カーブしている列車内に静止する観測者では、観測者自身が加速度運動をするために、慣性系の物理学から、説明できず、向心力に対応するものとして、円運動における慣性力を、遠心力と呼び用いている。これは、向心力と大きさが等しく、方向が反対の力であり、一般には、自転する地球上の物体に作用する、重力ととも

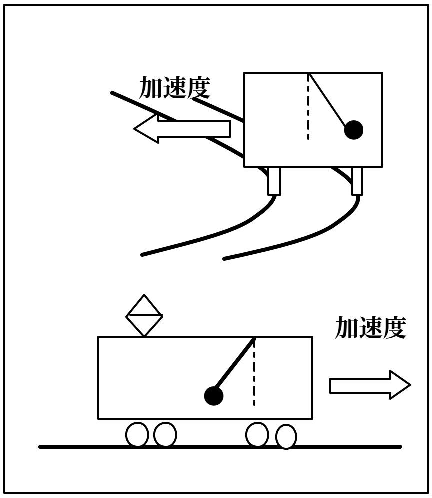


図 1-35 慣性系と遠心力

に、遠心力の説明がされている。これは、地球上で観測する観測者も、地球の自転により、回転運動をしているから、慣性系外の考えをしている例である。

第四節でも記述したが、慣性力を考える場合は、自然界に多く存在するが、加速度運動をする観測者にのみ限られる。日常の生活環境は、ミクロな範囲であるから、地球表面に静止する、観測者の観測内容・考え方を慣性系の考察としている。

エレベーターの運動と慣性力

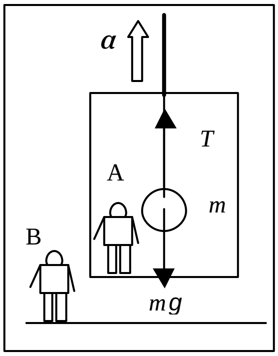


図 1-36　エレベータ

エレベーターで上下する人は、他の人や内部の物体を観測するとき、慣性力を考えなければならない。いま、図 1-36 のように、エレベーターが上方へ加速度の大きさαで上昇し、質量 m の小物体が伸び縮みしない紐で張力 T でつり下げられ、観測者 A がエレベータ内で、観測者 B が地面上で観測している。

加速度αで上昇している観測者 A には、小物体が静止して見えるから、小物体には、慣性力の－Fαを考え、重力の－mg と張力 T が作用し、これらの三力が釣り合っているから、小物体は静止していると観察する。従って次の式が求まる。

$$T + (-mg) + (-m\alpha) = 0 \qquad 1\text{-}52$$

$$T = m(g + \alpha) \qquad 1\text{-}53$$

他方、観測者 B は、慣性系の考察をするから、小物体には、張力 T と重力－mg が作用し、加速度αで上昇しているから、次の運動方程式が成り立ち

$$T + (-mg) = m\alpha \qquad 1\text{-}54$$

これを整理すれば、1-53 式と同じ結果となる。

1-53 式は、小物体の重さが T だとすれば、エレベータが加速度を生じて上昇するときに、重力 mg より mαだけ重くなることを示している。

エレベータが加速度αで下降するときは、

$$T = m(g - a) \qquad 1\text{-}55$$

となり、逆に、重力 mg より mαだけ軽くなることを示している。

エレベータの上昇加速度が、重力加速度と等しくなったとすれば、張力である重さは重力の二倍となる。

図 1-37 のように、エレベーターを宇宙へ飛び立つロケットと考えれば、重力加速度の何倍もの加速度で打ち上げられ、自分の体重の、十数倍もの重さに耐えられないと、宇宙飛行士にはなれない。

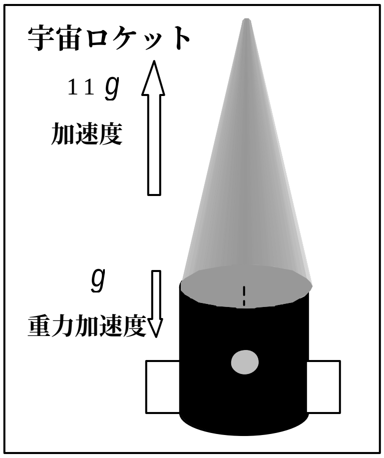


図 1-37 ロケット

また、下降加速度が、重力加速度と等しくなったとすれば重さはゼロとなり、無重量の状態で、小物体はエレベータ内を、紐に引かれることなく、漂う。ただ、無重量状態と宇宙空間での無重力状態とは区別が必要である。

第八節　回転から振動へ

円運動の正射影と振動理論

前節では、円運動に関する基礎理論を記述したが、その運動を、回転面を垂直に切る平面上に、設置されたスクリーンに、正射影し、その影の運動を考える。正射影は、無限遠点からの光線束は互いに平行である事を利用し、立体空間での物体の運動を平面に、平面上の運動を線分に写し取る方法であり、座標軸を用いて数学的に解析をする。ここからは、円運動を線分に正射影して、回転現象を線分上の運動に応用することになる。

円運動する物体の、正射影された、スクリーン上の影の運動は、円の中心の射影点を中心として、円の半径を最長とする、往復運動となる。

図 1-38 は、円運動と往復運動の関係する正射影である。右辺には変位

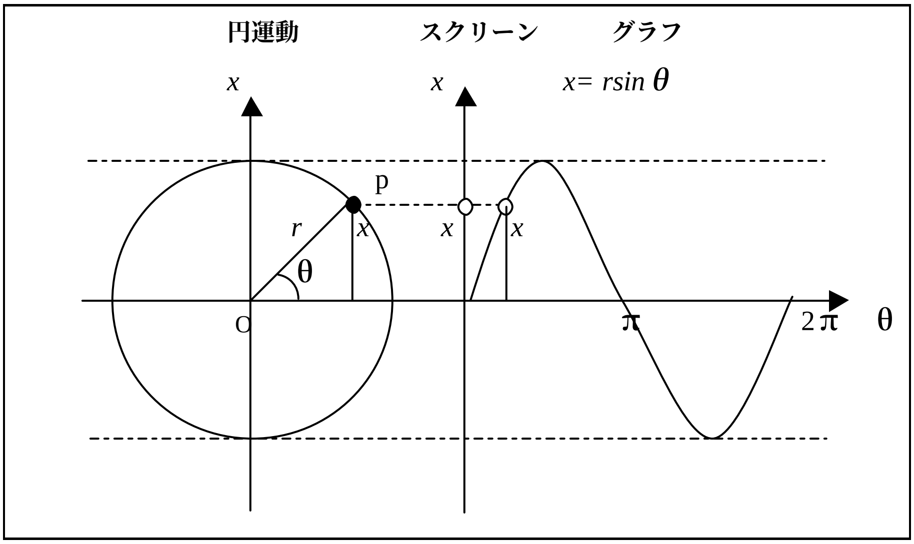


図 1-38 円運動と往復運動および位相のグラフ

x と角度θのグラフを示した。円運動において、P 点の変位を *x* とすれば、

$$x = r\sin q \qquad 1\text{-}56$$

となる。円運動、往復運動のいずれも、横軸からの高さ（変位）は角度の sin 曲線で示されるから、*x*- θグラフが描ける。角度をラジアン単位で考えると、グラフのθ軸の値は、180 ° =π、360 ° =2πとできる。

P 点での速さを *V* とすれば、x 方向の分速度の大きさ V_x は、

$$V_x = V\cos q \qquad 1\text{-}57$$

となり、角度θと速さ V_x の関係は、0〜0.5πでだんだん速くなり、0.5πで最大、0.5π〜1πでだんだん遅くなり、1πでゼロ、1π〜1.5πでだんだん速くなり、1.5πで最大、1.5π〜2πで、だんだん遅くなり、2πでゼロとなっている。図 1-39 で、この変化は、スクリーンに映る物体 P の影の運動も同じであり、また、cos 曲線からも説明できる。

P 点での加速度の大きさをαとすれば *x* 方向の分加速度の大きさ α_x は、

$$a_x = a\sin q \qquad 1\text{-}58$$

となり、角度θと加速度の大きさ α_x との関係は、前述のθと V_x の関係が 0.5πだけ、ずれている。角度θを位相とも言うが、このような関係を、位

相が 90°=0.5πだけ、ずれていると表現している。図 1-40 に示した。

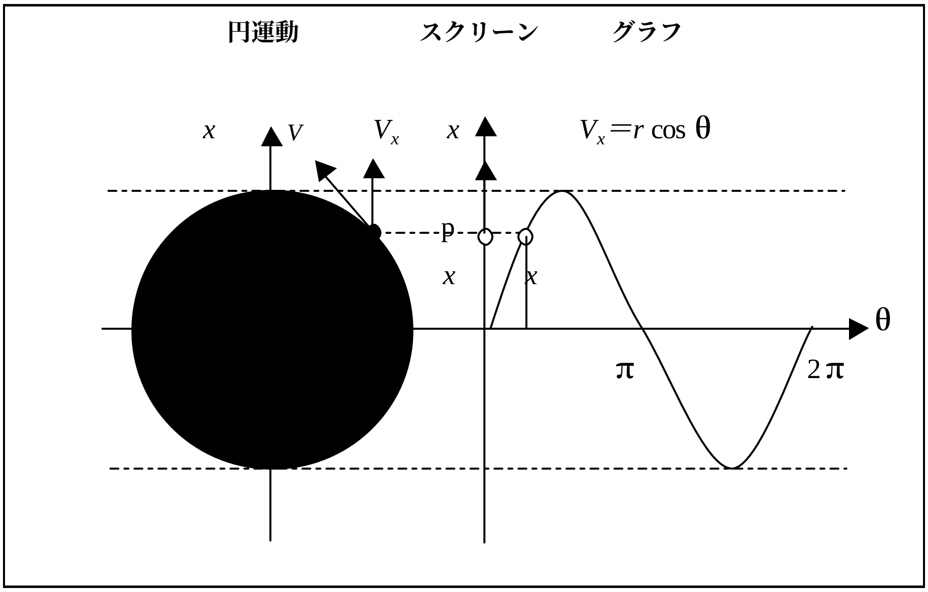


図 1-39 速度のグラフ

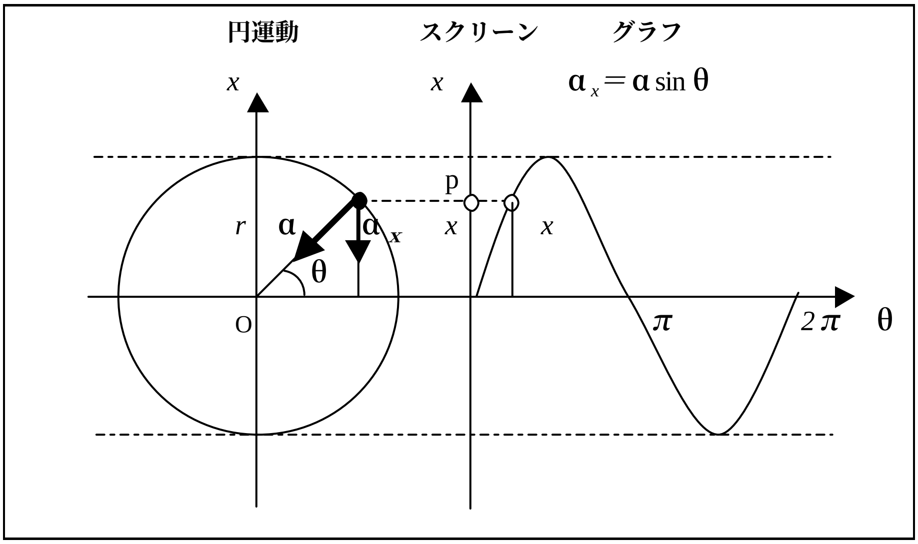


図 1-40 加速度のグラフ

スクリーン上の影の運動（単振動）

スクリーンの影の運動は、その速さと、加速度の大きさについてみると、円運動をする P 点の、x 方向成分の動きと同じである。速さは、中心点で最大で、半径 r の長さの時ゼロであり、加速度の大きさは、その逆である。

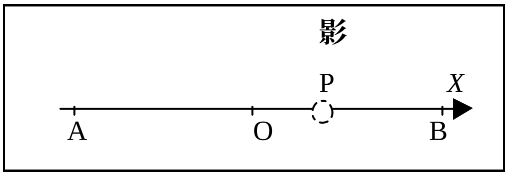


図 1-41　単振動

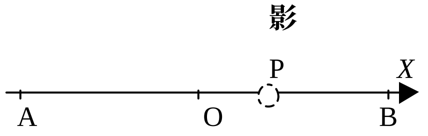
このような任意の一点を中心とした、加速度を生じ、速さを変化させながら、往復する運動を、単振動と呼んでいる。このような運動は、自然界に多く見られるが、身近には、時計の振り子や、子供が遊ぶブランコがある。もっとも、この例は、円周に沿っていると言う疑問があろうが、紐がものすごく長い場合を考えれば、ほぼ直線上で振動すると考えればよい。

いま、図 1-41 のように、スクリーン上で往復運動する影は、中心を O、往復の幅を AB とする単振動を行っている。O から B の方向へ X 軸を設定し、AB 間の任意の一点 P を影としその座標を x とすれば、1-56 式から、$r=OB$ として

$$x = OB\sin q \qquad \text{1-59}$$

となり、この x は変位という。また､P 点における影の速さ V_x、加速度の大きさ α_x は 1-57 式、1-58 式となる。

図 1-42 は円運動の各象限と、単振動の各区間について、X、V_x、α_x が、スクリーン上の X 軸に対する符号を調べたものである。ここで、変位 x と加速度の大きさ α_x の符号は、どの区間でも、異符号の関係を



象限	3、4		1、2	
区間	OA	AO	OB	BO
X	負		正	
V_x	負	正	正	負
α_x	正	正	負	負

x と α_x はどの区間でも異符号の関係

図 1-42　単振動の変位と加速度

示している。従って、影 P の加速度の方向は、常に中心向きであることが解る。

一般に、物体が任意の一点を中心とする単振動は、その運動を発生させる原因の力 F と、中心からの変位 X が、次の式で示される条件が、成り立つときに生ずる。

$$F = -kX \qquad 1\text{-}60$$

式中の k は、比例定数である。条件とは、前述したように、F と X が常に異符号である、ことが成り立つことである。

単振り子

単振動の例として、先に、振り子時計を示したが、近似的な単振動であることは、言うまでもない。しかし、1-60 式の条件が、成り立つことも事実である。ここで注意を要するのは、ブランコも同様であるとしてはいけないことである。ブランコは、単振動の原因である力以外に、ブランコをこぐ力も作用し、後述する、強制振動や減衰振動の要素があるからである。

図 1-43 のように、質量 m の小球が長さ ℓ の紐でつり下げられ、紐が鉛直線となす角度 θ まで、円周に沿って引き上げ手を離した。小球は、円周の最下端 O を中心として往復運動をした。

小球に作用する重力 mg の、円周方向への分力 $mg\sin\theta$ が、円周方向へ運動させる力となる。紐の方向への分力 $mg\cos\theta$ は、小球の運動方向と垂直に作用するから、円周方向には影響しない。いま、天井方向から線分 AB 上のスクリーンに小球の運動を正射影すれば、円運動と同様に分析ができ、小球に作用する力は、往復運動の中心 O に常に向かっているので、小球は単振動をしていることが解る。

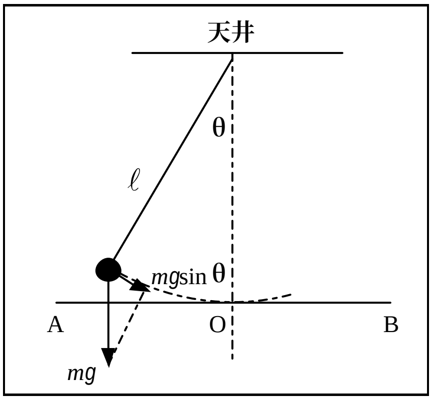


図 1-43 単振り子

振り子の等時性

小球が、一往復する時間を周期と呼び、記号 T で示すと、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad 1\text{-}61$$

となる。この式から、周期は小球の質量 m に関係せず、紐の長さ ℓ の平方根に比例する。従って、この装置を用いて振り子時計が、正確に時を刻んでくれるが、これを、振り子の等時性といっている。普通の振り子時計は、周期 T が 1 秒となるように、紐の長さ ℓ を調整して用いている。もっとも、この式を求めるには、小球が円周方向へ同じ速さで運動せず、後述する、物理学理論を学習してからでないと、煩雑すぎるので割愛する。

また、1-61 式から、重力加速度を測定するために、次の式を求める。

$$g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \qquad 1\text{-}62$$

バネにつり下げられた錘の単振動

バネが外力の作用に対する、反作用を応力と呼ぶが、バネの弾性力とも言う。外力を F とすれば、フックの法則により、バネの伸びた長さ X、バネ定数を k としたとき、$F = kX$ となる。

図 1-44 のように、バネ定数 k の、紐でつり下げられたバネに、質量 m の錘を結び、錘が静止してから、手で錘を鉛直下方へ引き、手を離すと、錘とバネは上下振動をする。

1 の状態では、バネの自重とバネの応力（バネが引く力）に等しく、全体は静止している。バネの下端には紐がつけられ、最下端には、質量が無視できる小指針がつけられている。

2 の状態では、錘に作用する重力 mg により、バネが伸ばされて、指針が X_0 だけ下降し、バネが引く力 $k X_0$ と釣り合い、静止する。

3 の状態では、重力 mg と紐を引く手の力 F との合力 $mg+F$ により、さらにバネが伸ばされて、指針が X だけ下降し、バネが引く力 $k\,(X_0+X)$ と

釣り合い、静止する。

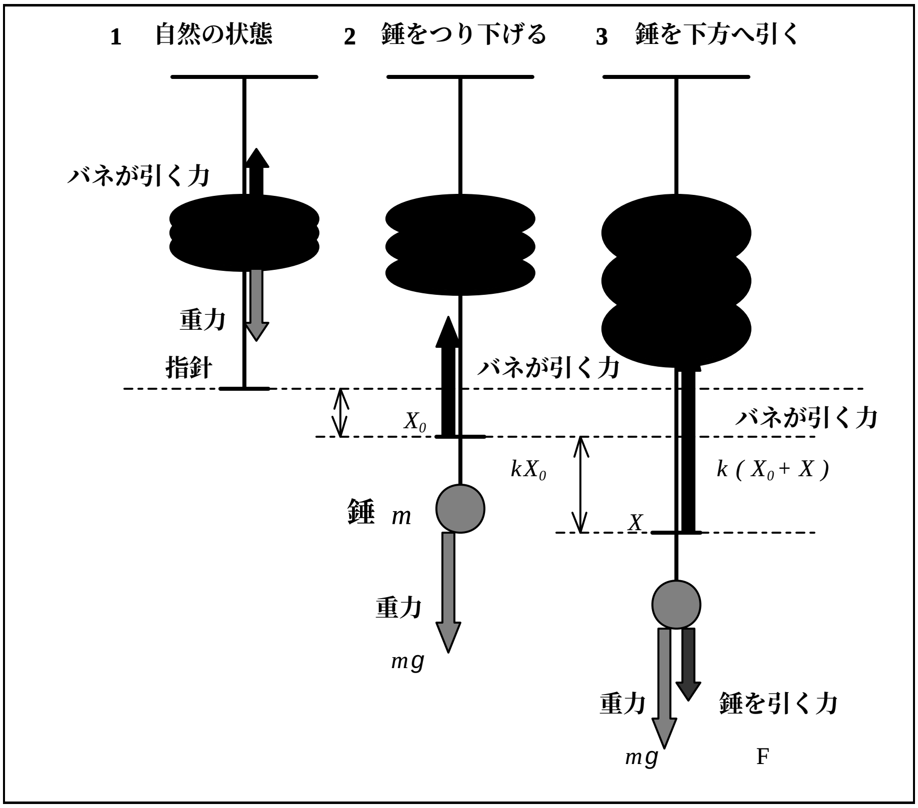


図 1-44 バネの単振動

ここで、2 の状態の力の釣り合いから

$$mg = kX_0 \qquad \text{1-63}$$

となり、3 の状態からは

$$F + mg = k(X_0 + X) \qquad \text{1-64}$$

が求まる。よって、1-63 式に、1-62 式を代入すれば

$$F = kX \qquad \text{1-65}$$

となる。

いま、3 の状態で、手の力 F をゼロにした瞬間を考える。2 の状態と、3 の状態における、指針の位置を O、B とし、O から B の方向へ X 軸を導入すれば、錘は鉛直上方へ、バネの応力 $-kX$ で引かれ、次の式が求まる。

$$F = -kX \qquad \text{1-66}$$

バネ定数 k は一定値であるから、この式は、単振動の条件式である、1-60 式を満足するから、この運動は単振動であると言える。従って、錘は、O 点を中心とする振幅 X の単振動を行う。

一般に、この単振動の周期を T とすれば、求め方は後述するが、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{1-67}$$

となる。この式からは、バネ定数 k（強いバネほど大きい）が小さく、錘の質量 m が大きいほど、周期は大きくなることが解る。

バネの利用（衝撃力の吸収）

バネは単独で利用するが、用途に応じて図 1-45 のように、接続して用いる。接続には、直列、並列、直・並列複合の三種がある。

一般にバネを用いるのは、図 1-46 のように、固体間にバネを挟み、

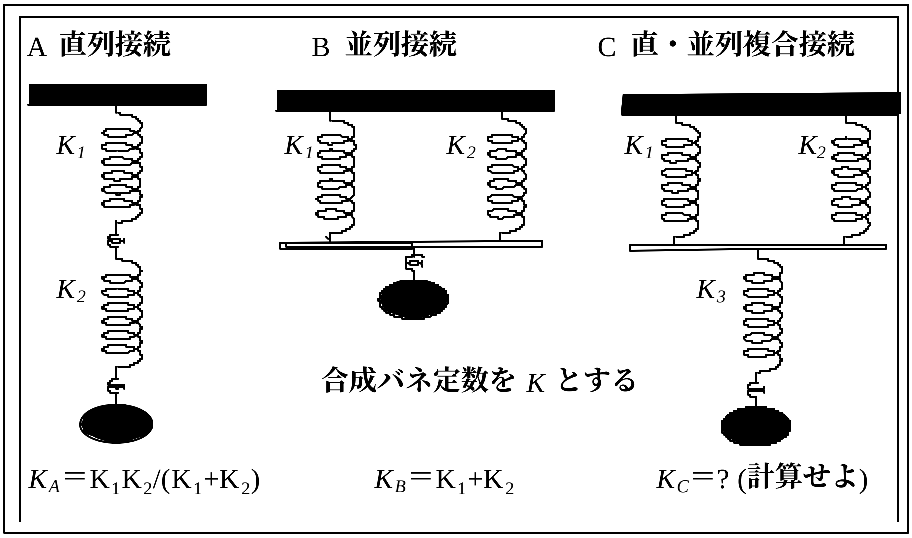


図 1-45 バネの接続

上下左右からの衝撃を、和らげるためである。自動車の車体とタイヤの間、列車とレールの間などに使われている。

日常生活では、椅子やソファー、ベッドなどの家具、自転車のサドル、単車や自動車のサスペンション、などに用いられている。

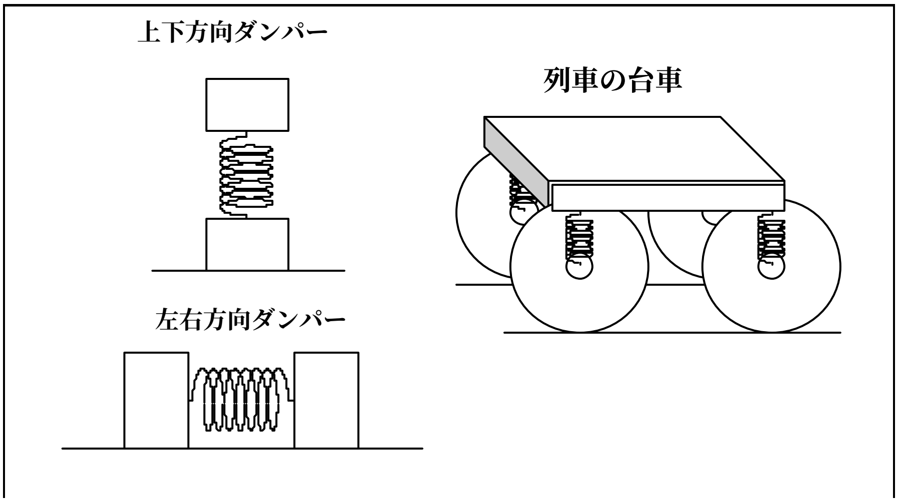


図 1-46 バネのダンパー

バネの弾性力は、衝撃力の一部をうち消すことになるため、衝撃力がそのまま物体に伝わらず、軽微な損傷で済むことになり、ショックアブソーバーとも呼んでいる。これらの働きは、バネでなくとも、ゴム板、布団、座布団、ゴムまりなどでも見られる。

第九節　運動量と衝突現象

運動量と力積

位置を変化させながら運動する物体は、他の物体からの作用を受けない限り、慣性の法則から、その速度は変化しない。ところが、すべての物体は、固体や流体との相互作用があり、それらからの作用を受けると、速度が変化し、加速度が生ずる。また、作用反作用の法則から、運動する物体は、他の物体に対して、速度と質量の大きさによる作用をし、加速度を生じさせ、運動の状態を変化させる。

いま、図 1-47 のように、摩擦のない滑らかな机の上で、物体 A が一定な力 F で、速さ V_1 で運動していた質量 m の物体 B に、時間 t だけ作用し、その速さを V_2 に変化させた。そのとき生ずる加速度の大きさをαとし、この運動は直線運動とする。

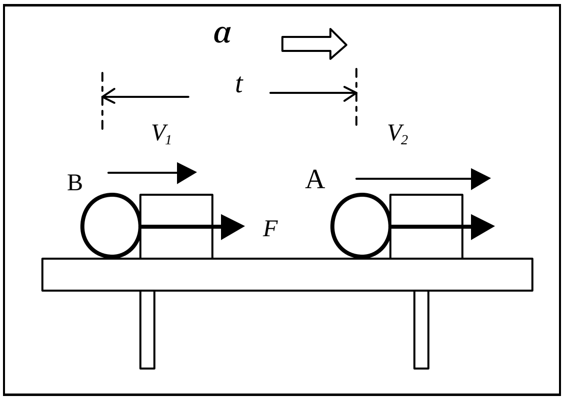


図 1-47 衝突

物体 B について、運動方程式は $F = ma$ で、生じた加速度は

$$a = \frac{V_2 - V_1}{t} \qquad \text{1-68}$$

となり、両式からαを消去すれば

$$mV_2 - mV_1 = Ft \qquad \text{1-69}$$

が求まる。

ここで、質量×速さ=運動量、力×時間=力積とすれば、運動量は物体が持つ運動の激しさを示し、1-69 式から、力積は運動量の変化に等しいということができる。また、力積 $F\,t$ は、左辺が一定であれば、作用する時間 t が小さいほど、力 F は大きくなり、作用の効果は大きくなる。極小な時間における力積は衝撃力として大きく、この場合、撃力と呼んで用いられている。スポーツでは、野球、ゴルフ、サッカー、バレー、テニスなどの、道具でボールを打つ競技において、この撃力を大きくするために、様々な工夫がされている。

物体の衝突と運動量保存の法則（バットでボールを打つ）

図 1-48 のように、質量 M_A のバット A で、質量 M_B のボール B を打つ場合を考える。

速さ $-V_B$ で飛んできたボールを速さ V_A で打ち、打球後バットは V_A'、ボールは V_B' で 運動した。その間に作用した力を F、バットとボールの接触時間を t とし、両者の運動は一直線上であり、バットのスイング方向を正とする。

このとき、バットがボールを打つ力 F に対し、バットにはボールからの反作用 $-F$ が作用する。バットとボール別に 1-69 式を求めると

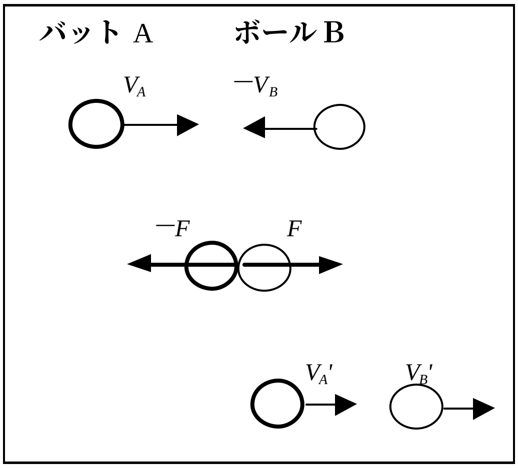


図 1-48 打撃

$$m_A V_A' - m_A V_A = -Ft \qquad 1\text{-}70$$

$$m_B V_B' - m_B(-V_B) = Ft \qquad 1\text{-}71$$

となる。この二式から力積 $F\,t$ を消去すれば、

$$m_A V_A + m_B(-V_B) = m_A V_A' + m_B V_B' \qquad 1\text{-}72$$

となり、打球直前のバットとボールの運動量の和は、直後の運動量の和に等しいことを示す。これを、運動量保存の法則と呼んでいる。

衝突現象と跳ね返りの係数

前項の例は、自然界に多く見られる現象で、衝突現象と言っている。交通機関では、事故の大半がこの現象であり、衝突時の撃力 $F\ \ t$ を和らげるため、バネ、バンパーなどのクッションや、衝突する物体間の係数である、跳ね返りの係数などの研究がなされている。

跳ね返りの係数は、衝突前後の速さの比で示すが、直線上で跳ね返るときは、前後の速さをそれぞれ V、V'、係数を e とすれば次の式で示される。ただし、速さの V、V' は正負の符号を含む。

$$e = -\frac{V'}{V} \qquad \text{1-73}$$

衝突現象は、跳ね返りの状態で、e の値により、次のように分類している。

1　$e = 0$　　　のとき　非弾性衝突（物体どうし、接着する）

2　$0 < e < 1$　のとき　弾性衝突（通常の衝突）

3　$e = 1$　　　のとき　完全弾性衝突（衝突前後の速さが同じ）

前項のバットとボールの場合、図 1-48 から跳ね返りの係数は

$$e = -\frac{V_A' - V_B'}{V_A - (-V_B)} \qquad \text{1-74}$$

となる。

完全弾性衝突は、現実には存在しないが、限りなく e が 1 に近い場合として、象牙と象牙の衝突が知られている。その例として、ビリヤードというスポーツの球が、象牙で作られている。

衝突現象のベクトル表現

前項までは、速さで示せる条件として、一直線上の場合を考えたが、現実は、あらゆる方向を含む運動における衝突は、速度と力をベクトルとしなければばならない。この場合の運動現象を斜衝突という。

従って、運動量と力積もベクトルとなり、運動量保存の法則は、ベクト

ルの保存の法則でもある。

　いま、図 1-49 のように、物体 A、B の質量を m_A、m_B、速度を $\vec{V}_A$、$\vec{V}_B$、作用する力を $\vec{F}$、接触時間を t とすれば、次の式が求められる。

$$m_A\vec{V}_A' - m_A\vec{V}_A = -\vec{F}t \qquad 1\text{-}75$$

$$m_B\vec{V}_B' - m_B\vec{V}_B = \vec{F}t \qquad 1\text{-}76$$

　この両式から、力積 $\vec{F}t$ を消去して

$$m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B = m_A\vec{V}_A' + m_B\vec{V}_B' \qquad 1\text{-}77$$

となる。

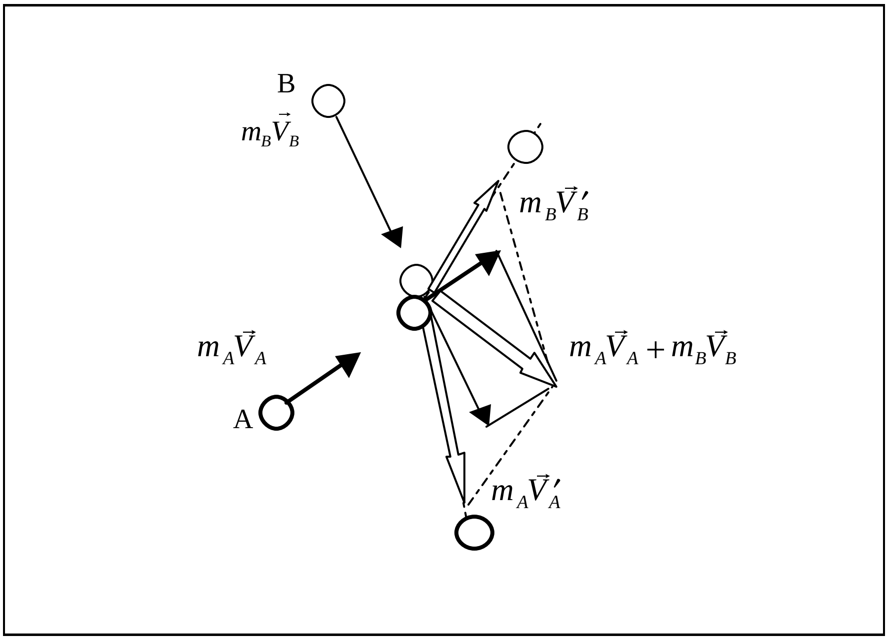


図 1-49　斜衝突

図中の矢印は、運動量ベクトルを示し、大小二つの平行四辺形の、対角線上に引かれた二重矢印が、$m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B = m_A\vec{V}_A' + m_B\vec{V}_B'$ を示す。すなわち、衝突前の運動量の和は、衝突後の運動量の和に等しいことが、成り立つ。

第十節　仕事と力学的エネルギー

物体がする仕事

　前節で、物体の持つ運動の激しさを運動量、他物体への作用の大きさを力積で示した。1-69 式から、運動量が減少したときは、他物体に対し作用し、力積は負、増加したときは、他から作用され、力積は正であることを示している。言い換えると、物体の運動が緩やかになれば、他に作用をし、激しくなれば、他から作用されることになる。

　いま、図 1-50 のように、質量 m の物体の速さが V_1 の時、力 F を時間

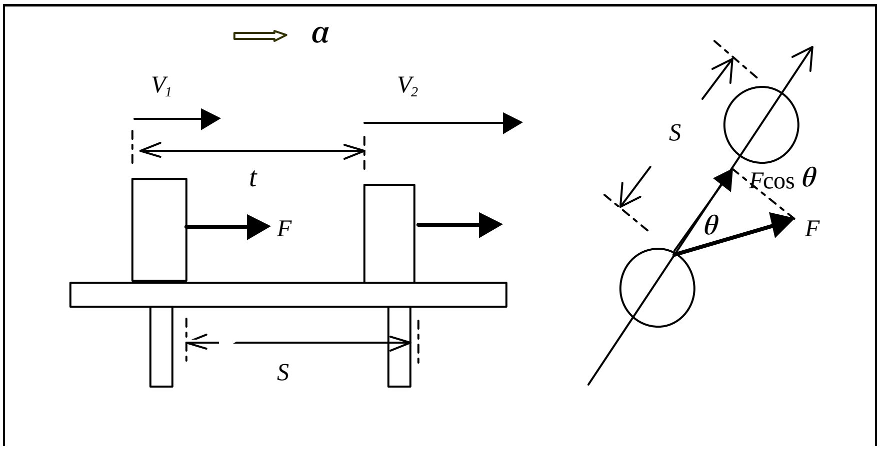


図 1-50 仕事

t だけ作用し、距離 S だけ動かし、速さを V_2 にした。このとき、力 F の仕事の大きさを W とすれば、次の式が定義される。

$$W = FS \qquad \text{1-78}$$

また、この物体の運動方程式 $F = m\alpha$ と加速度 $\alpha = (V_2 - V_1) / t$ を代入して

$$W = \frac{m(V_2 - V_1)S}{t} \qquad \text{1-79}$$

となる。この式は、運動量が変化した値 $mV_2 - mV_1$ と距離 S との積を、要した時間 t で除したものでもある。従って、運動量の変化が大きいほど、

他の物体にする仕事は大きくなる。

　一般に、図 1-50 の右側図のように、物体の運動方向と角度θをなす方向に力 F を作用し、距離 S だけ動かした場合は、

$$W = FS \cos q \qquad \text{1-80}$$

となり、仕事 W は、0≦θ< 90°のとき正、θ= 90°のとき 0、θ> 90°のとき負となる。正では、他の物体から仕事をされ、負では他の物体に仕事をすることになる。

仕事と運動エネルギー

　前項の、1-79 式をさらに検討すると、図 1-51 から、右辺の S/t は、時間 t の間の平均の速さ

$$\frac{V_1+V_2}{2}$$

に等しく、これを 1-79 式に代入すると

$$W = \frac{m(V_2 - V_1)(V_1 + V_2)}{2}$$

となり、さらに整理すると

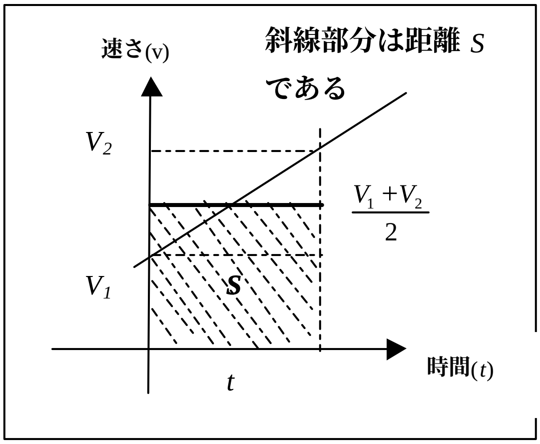


図 1-51 距離は面積

$$W = \frac{1}{2}mV_2{}^2 - \frac{1}{2}mV_1{}^2 \qquad \text{1-81}$$

が求まる。この式の右辺は、時間 t の前後における、受けた仕事の変化の量を示している。

　ここで、運動している物体は、他の物体から仕事をされるが、もともと所有していた仕事をする能力が、大きくされたり、小さくされたりしているとも言える。この、仕事をする能力をエネルギーと呼び、記号で E を用いる。1-81 式をエネルギーの記号で示せば、

$$W = E_2 - E_1 \qquad \text{1-82}$$

となる。この式からは、力 F を作用される前まで、所有していたエネルギーE_1 が、力 F で時間 t だけ仕事を受け、エネルギーが E_2 に変化したことが解る。

一般に、仕事の大きさ W は、エネルギーE の大きさと、同じであるとされ、1-81 式で示される右辺の各項を、

$$E_K = \frac{1}{2} mV^2 \qquad \text{1-83}$$

として、用いている。このように、運動している物体が持つエネルギーを、運動エネルギーと呼び、記号で E_K とする。従って、1-82 式を書き改めれば、

$$W = E_K = E_{K2} - E_{K1} = \frac{1}{2} mV_2^{\ 2} - \frac{1}{2} mV_1^{\ 2} \qquad \text{1-84}$$

となる。

エネルギーの単位

いま、ある物体に仕事Wがされた場合、1-78 式により、$W = FS$ だから、1 ニュートンの力で 1 メートル動かされたとき、$W = 1\ N\ m$ または、$W = 1\ kg\ m/s^2 \times 1\ m = 1\ kg\ m^2 / s^2$ である。この、$1N\ m = 1J$ として 1 ジュールと呼び、仕事の単位としている。また、$1\ kg\ m^2 / s^2 = 1J$ である。仕事とエネルギーは同じ物理量であるから、エネルギーの単位もジュールを用いる。

小さな物理量を扱う場合は、１ダインの力で１センチメートル動かすときの仕事は、$W = 1 dyn\ cm = 1\ erg$ とし、1 エルグと呼ぶ。また、実際の計算から、$W = 1\ g\ cm/s^2 \times 1\ cm = 1\ g\ cm^2 / s^2 = 1\ erg$ である。

人が重力に逆らってする仕事と位置エネルギー

机の上に置かれた質量 m の物体に、鉛直上方へ力 F で、高さ h まで引き上げる場合を考える。このとき、人がする仕事の大きさを W とすれば、1-78 式より、$W = Fh$ となり、力 F は重力 mg と等しいと考えられるから、

$$W = mgh \qquad 1\text{-}85$$

となる。この式から、物体は、人からエネルギーmgh を与えられ、高さ h の位置に存在すると言えるので、この場合のエネルギーを位置エネルギーと呼び、記号 E_P を用いる。従って、

$$E_P = mgh \qquad 1\text{-}86$$

となる。

重力がする仕事と位置エネルギーの減少

地面から高さ h_1 に存在する質量 m の物体が、重力の作用で仕事をされ、高さ h_2 まで下降した場合を考える。ここで、下降途中の経路は問わないとする。

結果として、重力は mg の力で鉛直方向へ、距離 h_1 - h_2 だけ動かしたから、その仕事の大きさ W は、

$$W = mgh_1 - mgh_2 \qquad 1\text{-}87$$

となり、右辺は位置エネルギーの減少量を示す。

前項の記述と併せて考えると、物体を主とした場合、重力に逆らう他物体からの仕事は正、重力のする仕事は負ということができる。

1-87 式を位置エネルギーの記号で示せば、

$$W = E_P = E_{P1} - E_{P2} = mgh_1 - mgh_2 \qquad 1\text{-}88$$

となる。

ここで注意すべきことは、重力は鉛直線上でのみ他の物体に重力を及ぼし、仕事をするが、水平線方向には重力の分力がなく、仕事をしないことである。従って、水平線方向への運動は、重力以外の力が作用しないと起こらないことになる。

物体の位置エネルギーを利用する例として、ビル屋上に蓄えられた水槽内の水や山間地のダム湖に溜められた水などがある。また、ビルを壊すときの大きな鉄球を、持ち上げて落下させ、位置エネルギーが減少した分だけ、ビルの破壊のエネルギーに変換しているのもこの例である。

位置エネルギーの増加と運動エネルギーの減少

図 1-52 のように、重力だけが作用する空間を、放物線を描いて運動する物体を考える。地面となす角度がθの方向へ初速 V_0 で投げ上げられ、最高点 Q で水平方向へ速さ $V_0\cos\theta$ で運動した。

初速 V_0 の地面と鉛直方向への分速は $V_0\cos\theta$、$V_0\sin\theta$ であり、鉛直線上での最高点の高さを h とする。

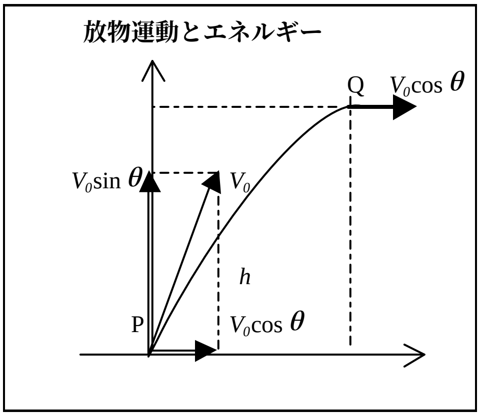


図 1-52 放物運動のエネルギー

ここで、物体の位置エネルギー、E_P と運動エネルギー E_K の増減を PQ 間で求めると、

$$E_P = mgh - mg \times 0 = mgh \qquad 1\text{-}89$$

$$E_K = \frac{1}{2}mV_0{}^2 - \frac{1}{2}m(V_0\cos q)^2 = \frac{1}{2}mV_0{}^2\sin^2 q \qquad 1\text{-}90$$

となる。これにより、位置エネルギー E_P が増加し、運動エネルギー E_K が減少していることが解る。

P 点から鉛直方向へ、初速 $V_0\sin\theta$ で投げ上げられた物体は、最高点での速さが 0 だから、第五節、等加速度直線運動の項で、1-25 式の第三式に、$V_2 = 0$ 、$V_1 = V_0\sin\theta$、α = ﹣g、$S = h$ を代入すれば、

$$0^2 - (V_0\sin q)^2 = 2(-g)h \qquad 1\text{-}91$$

となり、整理すれば、

$$V_0{}^2\sin^2 q = 2gh \qquad 1\text{-}92$$

となる。これを 1-90 式の最右辺に代入すれば、$E_K = mgh$ となる。よって、位置エネルギーが増加した分だけ、運動エネルギーが減少していることになる。

力学的エネルギー保存の法則

重力だけが作用する空間を重力場と呼び、位置エネルギーと運動エネルギーの和を、力学的エネルギーと呼ぶ。記号では $E = E_P + E_K$ と書く。

いま、図 1-53 のように、地面からの高さが h_1 の空間 1 では、速さ V_1 で運動していた物体が、しばらくして、空間 2 では高さ h_2、速さ V_2 となった。物体の質量を m とし、重力以外作用しないものとする。

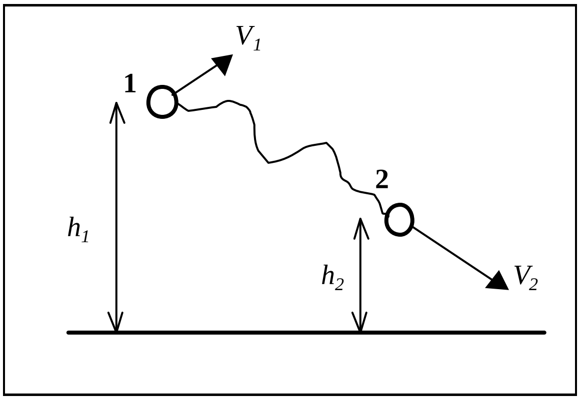


図 1-53 重力場における力学的エネルギー

ここで、空間 1 と 2 における物体の、力学的エネルギーE_1 と、E_2 を求めると、

$$E_1 = E_{P1} + E_{K1} = mgh_1 + \frac{1}{2}mV_1^{\ 2} \qquad \text{1-93}$$

$$E_2 = E_{P2} + E_{K2} = mgh_2 + \frac{1}{2}mV_2^{\ 2} \qquad \text{1-94}$$

となる。ここで、両式の差をとれば、

$$E_1 - E_2 = mg(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}m(V_1^{\ 2} - V_2^{\ 2}) \qquad \text{1-95}$$

右辺は、第 1 項の位置エネルギーの減少と、第 2 項の運動エネルギーの増加を示し、加えると 0 なる。従って、$E_1 = E_2$ が成り立つ。

運動状態が変化するとき、各点における力学的エネルギーは、常に等しく保存される。

ただし、重力以外の、運動方向に対して常に垂直に作用する力、例えば、単振り子の紐の張力や、摩擦のない斜面上を運動するときの、斜面からの抗力は、力学的エネルギーには関係しないので、保存力と呼んでいる。

従って、重力と保存力しか作用しない空間を、保存力場といい、保存力場における $E_1 = E_2$ の関係を、力学的エネルギー保存の法則という。

力学的エネルギーと他物体からの仕事との関係

前項の空間 1 と 2 の間で、他の物体から作用を受け、仕事 W をされたとき、$E_1 + W = E_2$、他の物体に作用し仕事 W' をしたとき、$E_1 - W' = E_2$ となる。また、$E_2 - E_1 = W$、$E_2 - E_1 = W'$ とも書ける。

一般に、他物体との仕事のやりとりを、

$$E_2 - E_1 = \pm W \qquad 1\text{-}96$$

とする。$+W$ は、他からエネルギーを受けて、力学的エネルギーが増加し、$-W$ は、他にエネルギーを与えて、力学的エネルギーが減少することを示す。

力学的エネルギーによる計算例

（1）図 1-54 のように、単振り子の錘の最下点における速さ V を求める。

錘をはなす点を 1、最下端を 2 として、$E_1 = E_2$ を求めると、

$$mg\ell(1-\cos q) = \frac{1}{2}mV^2$$

となり、$V = \sqrt{2g\ell(1-\cos q)}$ が求まる。

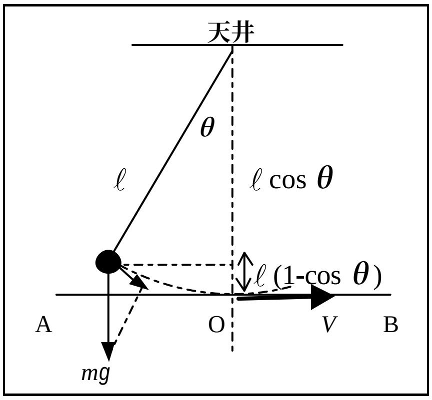


図 1-54 単振り子の場合

（2）質量 m の物体を、鉛直上方に初速 V で投げ上げたときの、最高点の高さ h を求める。

投げた点を 1、最高点を 2 とし、$E_1 = E_2$ を求めると、

$\frac{1}{2}mV^2 = mgh$ だから、$h = \frac{V^2}{2g}$ となる。

（3）滑らかな角度θの斜面上で、質量 m の物体を、初速 V_0 で斜面下方に、距離 S だけ滑らせた。S だけ滑ったときの速さ V を求める。

図 1-55 の、斜面方向の加速度をαとすると、$\alpha = g\sin\theta$ である。ここで、$E_1 = E_2$ を求めると、

$$\frac{1}{2}mV_0^{\ 2} = \frac{1}{2}mV^2 + maS$$

となり整理して、αを置き換えると、

$$V = \sqrt{V_0^{\ 2} - 2gS\sin q}$$

が求まる。

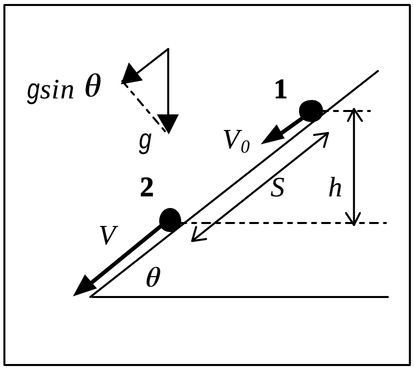


図 1-55 斜面の場合

また、別解は、鉛直方向で考えると、重力加速度 g のときの $E_1 = E_2$ を求めると

$$\frac{1}{2}mV_0^{\ 2} = \frac{1}{2}mV^2 + mgh$$

となり、図から、$h = S\sin\theta$ を代入すると先の結果が求まる。

仕事、運動エネルギー、運動量の関係

質量 m、速さ V で運動していた物体が、他の物体に仕事 W を与え、速さが 0 になったとき、運動量 mV を記号 P で示すと、次の関係式が得られる。

$$W = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{P^2}{2m} \qquad 1\text{-}97$$

従って、物体の持つエネルギーは、運動量の二乗に比例することが解り、衝突現象においては、その影響が著しい。

第二章　剛体系の力学

第一章では、質量を持つが、大きさや形を無視して考える質点について、物理学の基礎を記述した。ところが、現実の自然現象における物体は、大きさや形状を無視することができない剛体として考えなければならない。

地球の引力は、剛体各部分に作用するが、その力を重力と呼んでいる。各部分に作用する重力の影響を考える場合、多くの計算が必要である。そのため、剛体の質量を一点に集めた総質量に引力が作用すると考える。この場合、引力の作用点を重心と呼び、重心に存在する質量に対する重力を考えることになり、質点系の力学の法則を適用する事ができる。

重力以外の外力が剛体に働く場合、外力の合力が重心を通過する場合は、上記の質点系の力学を適用すればよいが、重心を通過しない場合は、剛体に回転運動を起こすため、回転を記述する物理量を定義する必要がある。このため、力のモーメント、剛体の慣性モーメント、角加速度、角運動量回転体のエネルギーなどを考えなければならない。

力のモーメントは、軸に対する回転の働きの大きさを表し、回転の方向により正負の符号を付ける。剛体の慣性モーメントは、力のモーメントによる回転運動の起こり安さを示し、剛体個有の物理量である。これは、剛体が回転する軸の設定によって大きさが異なる。角運動量は、剛体が回転運動している場合の激しさを表す。

質点系の運動方程式と同様に、回転運動の運動方程式が成立し、両者の運動は独立している事を考える。

他方、剛体相互間の摩擦や、流体内で運動する場合は、圧力や流体の抵抗を考えなければならない。

剛体系の運動は、立体運動として考察する必要があるため、３次元座標を用いるが、簡単な運動の場合は２次元座標で表現する。また、ベクトルの取り扱いが質点系の記述より複雑になるが、難しいものではないので、基礎的なものは取り上げている。

日常よく見られる現象を、簡単に説明するための物理学分野である。

第一節　剛体の運動

剛体の平面運動

剛体とは

任意の 2 点間の距離が外力に対して不変な物体を剛体という。一章で扱った質点系における特殊な場合でもある。このため、質点系で成立する法則を剛体においても用いている。

従って、剛体の形と大きさは不変である。

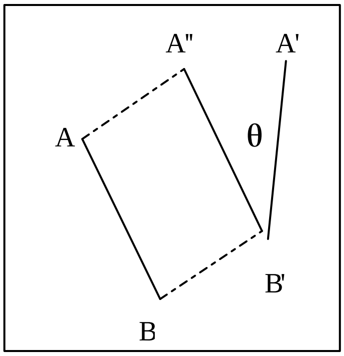


図 2-1　棒の平面運動

平面運動

図 2-1 に剛体内の 2 点 A,B の座標を(x_A, y_A)、(x_B, y_B)とすれば、AB の長さは

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = const \qquad 2\text{-}1$$

である。

いま、剛体が平面運動し、線分 AB が A'B' に移ったとすれば、まず、AB が A''B' に移動する並進運動と、B'点を通り x,y 平面に垂直な軸のまわりの回転運動が生じたと考えられる。

剛体の内外に関わらず、任意の一点を軸とする回転においては、その周りのどの点においても、回転角の大きさと方向は不変である。すなわち、軸に対する各点の角速度は同じである。このことから、剛体の平面運動（変位、速度、加速度）は、任意の代表点に対する並進運動と、その周りの回転運動との合成運動となる。

投げられたボールは、重心を軸とした回転運動をしながら、重心自身が質点の運動を行っている。両者の運動は、初期条件により規定される。

瞬時中心

図 2-2 のように、AA' と BB' の垂直二等分線の交点 O を軸の点にすれば、AA'を BB'に回転だけで移動させることができる。

実際は、この O 点自身が時間とともに運動しているから、ある瞬間における線分の移動は O 点を瞬間における回転運動の中心として考えるということである。この意味で、O 点を瞬時中心という。瞬時中心は、2 点の速度に垂直に引いた垂線の交点としても求められる。

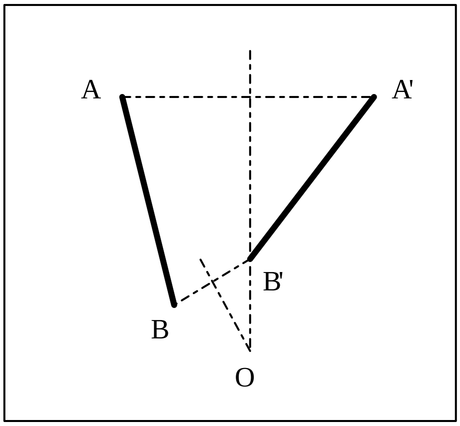


図 2-2 瞬時中心

図 2-3 は、車輪が速さ V でレール上を滑らずに走行し、車輪中心 O を軸とする角速度ωの回転運動をしている。ある時刻に置いて、任意の点 P はレールの方向に速さ v、点 P の接線方向に速度 $a\omega$ で運動している。

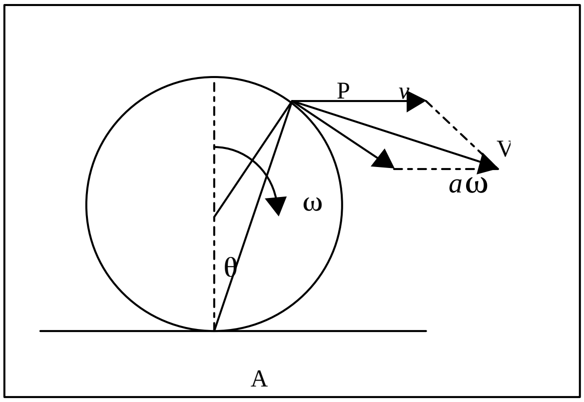


図 2-3 車輪の瞬時中心

従って P 点は 2 つの速さを合成した速度を V とすれば、$V=2a\omega\cos\theta$ で、その方向は図から AP に垂直である。一方、線分 AP は、$AP=2a\cos\theta$ であるから、速度 V は A を中心、AP を半径、ωを角速度とする円運動と考えることができる。従って、レール上の A 点は瞬時中心である。

レールの A 点における合成速度の速さ V は、$V= v - a\omega$ であるが、車輪は滑らない条件だから、$V=0$ より $v=a\omega$ である。

剛体の回転運動

P 点が xy 平面内で半径 r の円運動をするとき、Δt 時間に動径 $\vec{r}$ が Δθ 回転し、動径 $\vec{r}'$ になった。このとき、P の描く円弧 Δs は

$$\Delta s = r\Delta q \qquad 2\text{-}2$$

である。

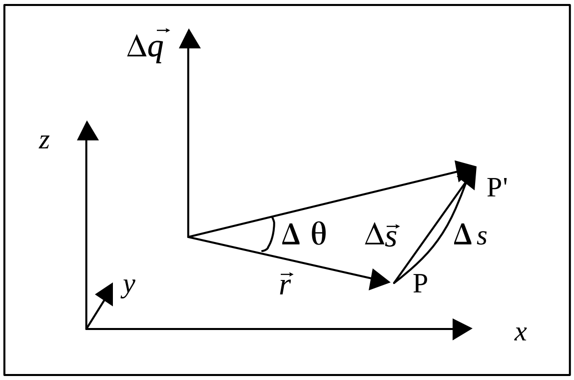


図 2-4 剛体の回転

ここで、$\vec{r}$ を $\vec{r}'$ の方向へ右ねじを回し、右ねじの進む方向を向きとする角変位ベクトル $\Delta\vec{q}$ を考える。

また、図 2-4 のように、ベクトル $\Delta\vec{s}$ を考えると、$\vec{r}$、$\Delta\vec{s}$、$\Delta\vec{q}$ の右手系となり、4.2 式は

$$\Delta\vec{s} = \Delta\vec{q} \cdot \vec{r} \qquad 2\text{-}3$$

となる。これを、時間微分すれば、速度 $\vec{v}$、角速度 $\vec{w}$、半径 $\vec{r}$ の関係式

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \qquad 2\text{-}4$$

が得られる。

角速度の大きさωと半径 r が一定であれば

$$v = rw$$

である。

以上を一般化すると、平面運動をしている剛体の一点 P の変位 $\Delta\vec{s}$ は、任意の回転を考える代表点の変位 $\Delta\vec{s}_0$ と、角変位 $\Delta\vec{q}$ から

$$\Delta\vec{s} = \Delta\vec{s}_0 + \Delta\vec{s}' = \Delta\vec{s}_0 + \Delta q \times \vec{r}' \qquad 2\text{-}5$$

となり、これを時間微分しすれば、速度に関して

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w} \times \vec{r}' \qquad 2\text{-}6$$

となる。ここで、$\vec{v} = 0$ となるような点 P が瞬時中心である。

第二節　剛体に働く力のモーメント

力のモーメント

力が作用する点を作用点という。図 2-5 のように、任意の点 O に関する位置ベクトル$\vec{r}$の作用点 B に、力$\vec{F}$が作用するとき、

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad 2\text{-}7$$

の$\vec{N}$を O に関する力$\vec{F}$のモーメントという。

ここで、位置ベクトル$\vec{r}$と力ベクトル$\vec{F}$のベクトル積の大きさは、その方向への基本ベクトルを$\vec{n}$として

$$\vec{r} \times \vec{F} = rF\vec{n}\sin q \qquad 2\text{-}8$$

となる。

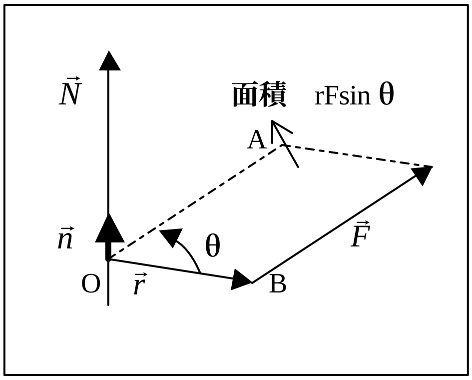


図 2-5 力のモーメント

ここで、$\vec{N}$の方向は$\vec{r}$を$\vec{F}$と同じベクトルOAにθの回転で右ねじを回して重ねるとき、右ねじが進む方向である。またその大きさは、$\vec{r}$と$\vec{F}$で作成する平行四辺形の面積である。

偶力

図 2-6 の$\vec{F}$と－$\vec{F}$のように、大きさ等しく平行で向きの反対な二つの力の組を偶力という。偶力の作用点 A,B の位置ベクトルを$\vec{r}_A$、$\vec{r}_B$とし、弧二つの力のモーメントの和を$\vec{N}$とすれば、

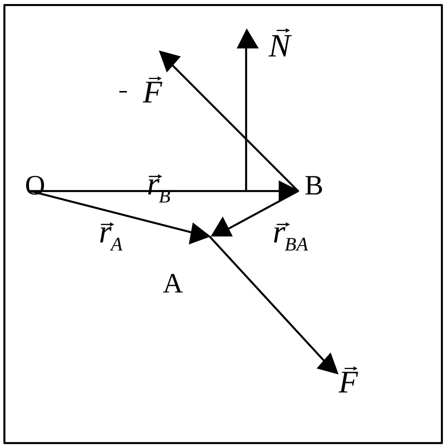


図 2-6 偶力

$$\vec{N} = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \cdot \vec{F} = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{F} \qquad 2\text{-}9$$

となる。この $\vec{N}$ を偶力のモーメントという。ただし、このモーメントは、点 O に無関係で、考える偶力のみで決まる。また、その方向は、偶力を作る力の平面に垂直で、向きは $\vec{r}_A$ を $\vec{r}_B$ に右ねじを回して重ねるときの、右ねじの進む方向である。|

偶力を構成する力 $\vec{F}$ と $-\vec{F}$ の垂直距離を h とすれば、$N=|\vec{N}|=hF$
となり、この h を偶力の腕の長さという。ネジや車のハンドルを回すとき、回転軸から距離の大きな点に、偶力を作用させる方が、回転がしやすくなるのはこの N が大きくなるからである。

ここで、剛体に対する偶力の効果は、点 O に無関係であり、モーメント $\vec{N}$ が一定であれば、$\vec{F}$ や作用点が変わっても同様である。従って、$\vec{N}$ は自由ベクトルである。

多くの偶力は、ベクトルの和の法則に従って合成することができる。

作図による平行力の合成

剛体に作用する多くの外力の合成は、次の２通りである。

A　１つの合力が得られる

B　一組の平行力が得られる

A の場合は図 2-7 のように、剛体に n 個の力 $\vec{F}_j$ $(j = 1......n)$ が作用するとき、ベクトルの一般的性質である「ベクトルは平行移動しても同じベクトルである」、「力の効果は、力をその作用線のどこに移動しても同じである」、「互いに交わる 2 力は、2 力を 2 辺とする平行四辺形の、対角線に作られる力を合力として合成される」から、2 つの力を平行四辺形の方法で次々合成し、最後の合成が終わると 1 つの合力が得られる。

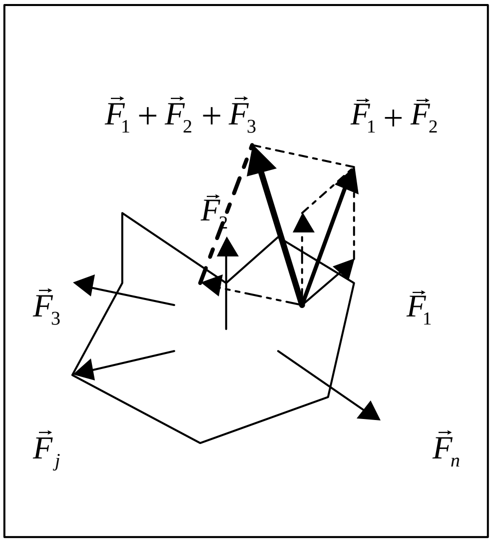


図 2-7　力の合成

B の場合はさらに次の 3 通りがある。

1　同じ方向の平行力

2　逆方向で大きさが異なる平行力

3　逆方向で大きさが同じ平行力

3 の場合は前節の偶力であり、これ以上合成できない。ただし、偶力のモーメントが逆の偶力でうち消すことはできる。

ここでは 1 の場合について、合成の方法を図形的に処理する方法を考える。

図 2-8 は$\vec{F}_1$と$\vec{F}_2$を合成するためそれぞれの作用点 A,B に互いにうち消し合う 2 力$\vec{F}$と$-\vec{F}$を導入し、それらとの合力を平行四辺形の方法で求め、ついで、得られた 2 つの合力をこの合力の作用線の交点 C に移動し、さらに合成する。こうして得られた合力は図形の計算から、次のことが導かれる。

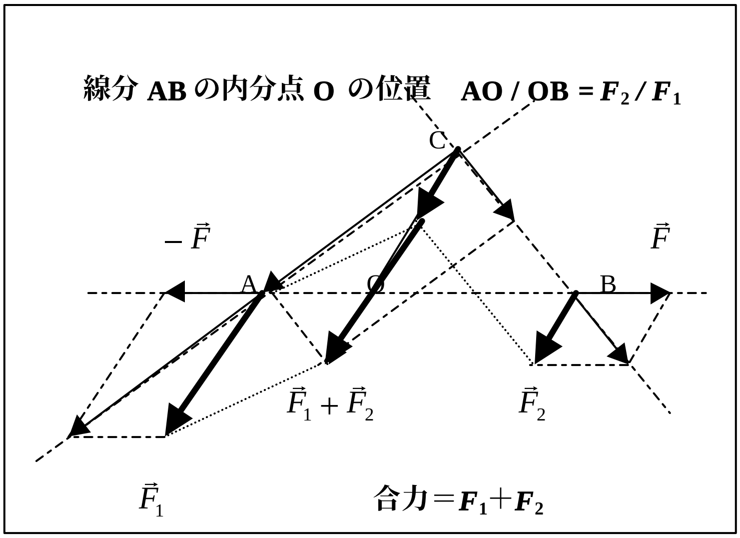


図 2-8　同方向の平行力合成

「同じ方向で平行な 2 つの力の合力は、大きさが 2 力の大きさの和であり、方向 は 2 力と同じで、その作用点は、2 力の作用点 A,B を結ぶ線分 AB を、$AO/OB = F_2/F_1$に内分する点 O である。」

方向が異なる 2 力の合成は次のようにまとめられる。

「同じ方向で平行な 2 つの力の合力は、大きさが 2 力の大きさの差であり、方向は大きいほうの力と同じで、その作用点は、2 力の作用点 A,B を結ぶ線分 AB を、$AO/OB = F_2/F_1$に外分する点 O である。」

なお、平行力の合成における合力の作用点は、後述する、剛体の回転に関する力のモーメントの釣り合いの法則から、簡単に求まる。

ベクトル計算による平行力の合成

図 2-9 において、A,B を作用点とする平行な 2 力を$\vec{F}_A$、$\vec{F}_B$とし、線分 AB 上の点 P で合成すれば

$$\begin{aligned}\vec{r}_A\times\vec{F}_A+\vec{r}_B\times\vec{F}_B &= \vec{r}_P\times\vec{F}_A+\vec{r}_{PA}\vec{F}_A+\vec{r}_P\times\vec{F}_B+\vec{r}_{PB}\times\vec{F}_B \\ &= \vec{r}_P\times\left(\vec{F}_A+\vec{F}_B\right)+\vec{r}_{PA}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{PB}\times\vec{F}_B\end{aligned} \qquad 2\text{-}10$$

となる。右辺の 2 項は P に関する$\vec{F}_A$のモーメント、3 項は P に関する$\vec{F}_B$のモーメントであるが、これが 0 になる点 P は

$$\vec{r}_{PA}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{PB}\times\vec{F}_B=0 \qquad 4.11$$

である。ここで、A,B,P は同じ直線上にあり、$\vec{F}_A$、$\vec{F}_B$は平行だから、

$$\frac{AP}{BP}=\pm\frac{F_B}{F_A} \qquad 2\text{-}12$$

または

$$\frac{AP}{AB}=\frac{\vec{F}_B}{\vec{F}_A\pm\vec{F}_B} \qquad 2\text{-}13$$

となり、前節の結果を示す。ここで±の＋は同方向、－は反対方向の 2 力関係である。

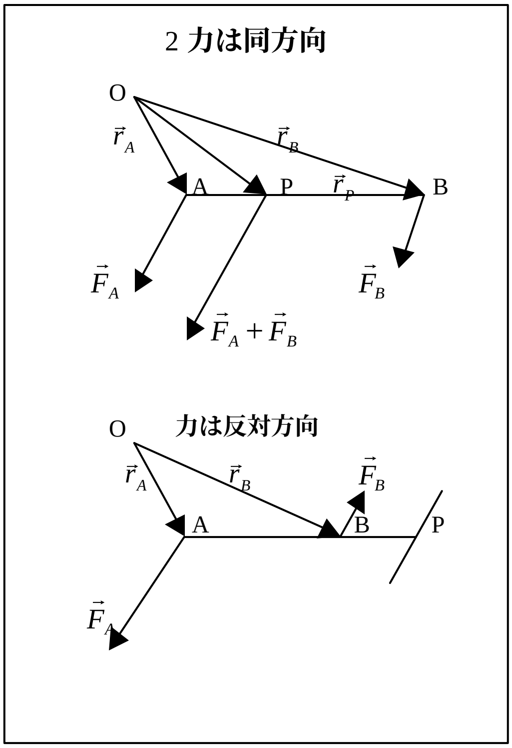


図 2-9 平行力の合成

式 4.11 を 4.10 に代入すれば

$$\vec{r}_A\times\vec{F}_A+\vec{r}_B\times\vec{F}_B=\vec{r}_P\times\left(\vec{F}_A+\vec{F}_B\right) \qquad 2\text{-}14$$

が求まる。

2 力が同方向の場合、力の大きさを F_A、F_B とすれば、式 4.14 は

$$\vec{r}_P=\frac{F_A\vec{r}_A+F_B\vec{r}_B}{F_A+F_B} \qquad 2\text{-}15$$

となる。ここで、力が多く作用する場合、合力の大きさを F、その作用点を G、G の位置ベクトルを$\vec{R}$とすれば、

$$F=\sum F_i \qquad \vec{R}=\sum F_i\vec{r}_i/F \qquad 2\text{-}16$$

であり、G を平行力の中心という。

第三節　剛体に働く力がする仕事

内力がする仕事

図 2-10 において、剛体内の 2 点 A,B に力 $\vec{F}_A$ と $\vec{F}_B\left(=-\vec{F}_A\right)$が作用している。剛体が運動するとき、点 B は剛体の全ての点の並進運動による変位$\Delta\vec{s}$と、点 A を軸とする回転運動の変位$\Delta\vec{s}'$を合わせた運動をする。

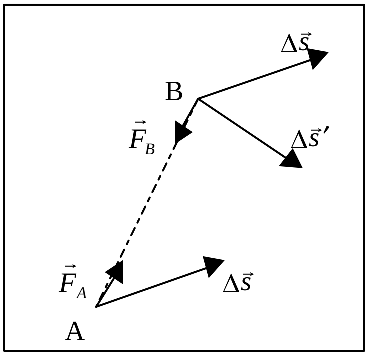


図 2-10　内力がする仕事

2 点を一対として、2 つの内力がする仕事を W とすれば

$$W=\vec{F}_A\cdot\Delta\vec{s}+\vec{F}_B\times\left(\Delta\vec{s}+\Delta\vec{s}'\right)=\vec{F}_A\cdot\Delta\vec{s}-\vec{F}_A\times\left(\Delta\vec{s}+\Delta\vec{s}'\right)=-\vec{F}_A\times\Delta\vec{s}' \qquad 2\text{-}17$$

となるが、$\Delta\vec{s}'$は 2 つの力の作用線 AB に対して垂直をなすので、この場合の仕事 W は 0 である。

剛体内の全ての点を一対にして、その仕事の総和を求めても、やはり 0 である。従って、剛体に力が作用するときは､内力の仕事の総和は 0 となり、外力がする仕事だけを考えればよい。

回転における外力の仕事

図 2-11 は剛体内の軸 O に z 軸を取り、任意の点 P に力$\vec{F}$が作用し、P 点が z 軸の周りにΔqだけ回転して、変位$\Delta\vec{s}$を生じたものである。

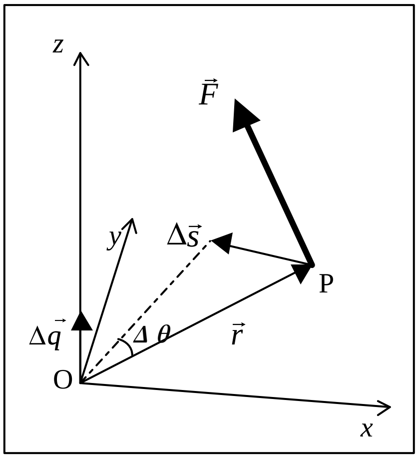


図 2-11　外力の仕事

この変位$\Delta\vec{s}$に対する外力$\vec{F}$の仕事をWとすれば

$$\Delta W = \vec{F} \times \Delta\vec{s} \qquad 2\text{-}18$$

である。

ここで、変位$\Delta\vec{s}$は、Δqを軸性ベクトル$\Delta\vec{q}$とし、軸 O にたいする点 P の位置ベクトルを$\vec{r}$として

$$\Delta s = \Delta\vec{q} \cdot \vec{r} \qquad 2\text{-}19$$

となるから、

$$\Delta W = \vec{F} \times \Delta\vec{s} = \vec{F} \times \Delta\vec{q} \cdot \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \times \Delta\vec{q} \qquad 2\text{-}20$$

これは、O 軸に対する力$\vec{F}$のモーメント$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$に角変位$\Delta\vec{q}$の大きさを乗じたものである。

ここで、Δqはxy平面、$\Delta\vec{q}$はz方向に限られるから、$\vec{N}$はz成分Nだけを考える。また、$\vec{r}$も平面内、Nのz成分を与える$\vec{F}$は点 P が描く円周方向の成分だけであるから、

$$W = N\Delta q \qquad 2\text{-}21$$

一般に、剛体内の全ての点P_iに拡張すれば、

$$\Delta W = \sum \Delta W_i = \sum N_i \Delta q = \left(\sum N_i\right)\Delta q \qquad 2\text{-}22$$

となる。

平面運動における外力の仕事

図 2-11 のように、平面運動をする剛体の任意の点 P の変位$\Delta\vec{s}$は、軸 A とともにする並進運動の変位$\Delta\vec{s}_0$と軸周りの回転による変位$\Delta\vec{s}'$に分けられ、

$$\Delta\vec{s} = \Delta\vec{s}_0 + \Delta\vec{s}' \qquad 2\text{-}23$$

となる。

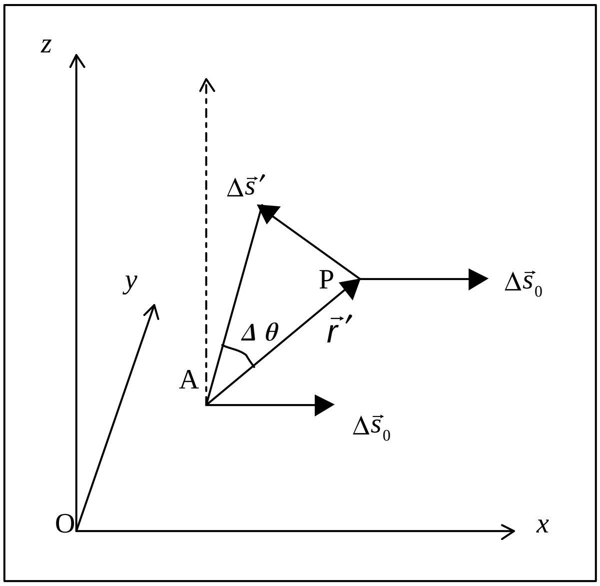


図 2-11 並進・回転に対する仕事

ここで、変位$\Delta\vec{s}'$は、Δqを軸性ベクトル$\Delta\vec{q}$とし、軸 O に対する点 P の位置ベクトルを$\vec{r}'$として

$$\Delta s' = \Delta\vec{q}\cdot\vec{r}' \qquad 2\text{-}24$$

であるから、点 P の変位に対する外力の仕事 W は

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F}\times\Delta\vec{s} = \vec{F}\times\Delta\vec{s}_0 + \vec{F}\times\Delta q\cdot\vec{r}' = \vec{F}\times\Delta\vec{s}_0 + \vec{r}'\times\vec{F}\times\Delta\vec{q} \\ &= \vec{F}\times\Delta\vec{s}_0 + N\Delta q\end{aligned} \qquad 2\text{-}25$$

となる。第 1 項は軸にする仕事、第 2 項は軸に対する力のモーメントのする仕事である。

剛体全体にする仕事 W_i は

$$W_i = \sum\vec{F}_i\times d\vec{s}_i = \left(\sum\vec{F}_i\right)\times\Delta\vec{s}_0 + \left(\sum N_i\right)_0 dq \qquad 2\text{-}26$$

である。ここで、$\left(\sum N_i\right)_0$ は O 軸周りの外力のモーメントである。また、重心を軸とする場合は

$$W_G = \sum\vec{F}_i\times d\vec{s}_i = \left(\sum\vec{F}_i\right)\times\Delta\vec{s}_G + \left(\sum N_i\right)_G dq \qquad 2\text{-}27$$

である。

第四節　剛体のエネルギー

軸に対して回転する剛体の運動エネルギー

図 2-12 は剛体が軸 O の周りを角速度ωで回転するもので、任意の点 P から軸に下ろした垂線の長さを r_i、P 点の速さを v_i とすれば

$$v_i = r_i w \qquad 2\text{-}28$$

であり、その方向は、O 軸に垂直な r_i を半径とする平面内の円の接線方向である。

図 2-12　軸 O の周りの回転

P 点の微小質量をΔm_i、密度をρ_i、微小体積をΔV_iとすれば、O 軸周りの P 点の回転による運動エネルギーΔK_iは

$$\Delta K_i = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} r_i r_i^2 w^2 \Delta V_i \qquad \text{2-29}$$

である。

軸 O 周りの剛体の全運動エネルギーKは

$$K = \int \Delta K_i = \frac{1}{2}\left[\int r r^2 dV\right] w^2 \qquad \text{2-30}$$

である。ここで、［　］内をIとし、KをIで示せば

$$I = \int r r^2 dV \qquad \text{2-31}$$

$$K = \frac{1}{2} I w^2 \qquad \text{2-32}$$

となる。このIは軸周りの慣性モーメントといい、慣性の大きさを示す。

剛体が平面運動をする場合、重心の並進運動の運動エネルギーをK_tとすれば、

$$K_t = \frac{1}{2} M v_G^2 \qquad \text{2-33}$$

である。

剛体の重心を通る軸の周りの慣性モーメントをI_G、軸に対する回転運動のエネルギーをK_rとすれば

$$K_r = \frac{1}{2} I_G w^2 \qquad \text{2-34}$$

である。

平面運動を行う剛体の全エネルギーKは,$K=K_t+K_r$であるから

$$K = K_t + K_r = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G w^2 \qquad \text{2-35}$$

である。

ただし、この式で説明できるのは、剛体における重心の並進運動と、重心周りの回転運動にのみ限定されること、を注意する必要がある。

剛体の運動エネルギー式

軸周りの回転をする剛体に、外力が仕事をするときの仕事は式 2-22 から$\left(\sum N_i\right)dq$　で示され、それにより増加する運動エネルギーは式 2-32 で $1/2\,Iw^2$　と求められる。 従って、固定軸周りの剛体のエネルギー式は

$$d\left(\frac{1}{2}Iw^2\right)=\left(\sum N_i\right)dq \qquad \text{2-36}$$

である。

これを微分すれば、

$$\left(I\frac{dw}{dt}\right)dq=\left(\sum N_i\right)dq$$

だから

$$I\frac{dw}{dt}=N_i$$

が得られ、これは後述する固定軸周りの運動方程式なる。

平面運動をする剛体については、そのエネルギー式は式 2-35 から

$$\frac{1}{2}Mv_G{}^2+\frac{1}{2}I_Gw^2$$

であるが、重心の運動エネルギーと重心を軸とした回転の回転エネルギーとの和である。平面運動に対する外力がする仕事は、重心にする仕事と重心周りの仕事との和である。これは、式 2-26 から

$$\left(\sum \vec{F}_i\right)\times\Delta\vec{s}_0+\left(\sum N_i\right)_0 dq$$

である。従って、平面運動のエネルギー式は

$$d\left(\frac{1}{2}M\vec{v}_G{}^2+\frac{1}{2}I_Gw^2\right)=\left(\sum \vec{F}_I\right)d\vec{s}_G+\left(\sum N_i\right)_G dq \qquad \text{2-37}$$

である。

第五節　慣性モーメント

回転体の慣性モーメント

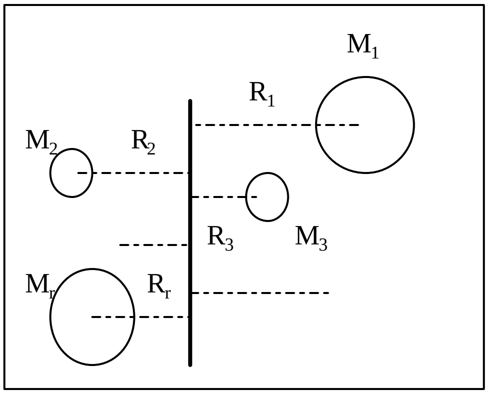


図 2-13　回転体の慣性モーメント

静止する回転可能な物体や、固定された軸を回転する物体には、回転し易さを示す物理量が考えられている。それを、慣性モーメントと言い、記号の I を用いる。I が大きいほど回転しにくく、回転している場合はなかなか止まらないことを示す。

一般に、「回転する物体の慣性モーメントは、質量と回転軸からの距離の二乗との積に等しい」とされている。

図 2-13 のように、軸からの距離が R_1、質量が M_1 の物体が角速度ωで回転しており、軸の周りには、合計 r 個の物体が、同じ角速度で回転しているとする。このような複合体の場合、慣性モーメントの定義から

$$I = \sum_{j=1}^{r} M_j R_j^{\,2} \qquad 2\text{-}38$$

となる。

ここで、一様な棒の慣性モーメントを考える。図 2-14 の **A** は軸と棒が垂直、**B** は同方向とする。

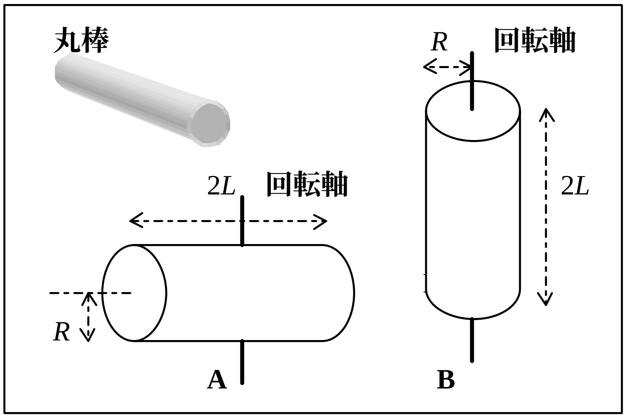


図 2-14 円柱体の慣性モーメント

A の場合は

$$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{3}ML^2 \qquad \text{2-39}$$

B の場合は

$$\frac{1}{2}MR^2 \qquad \text{2-40}$$

である。このように回転軸の取り方により慣性モーメントは異なる。

いろいろな剛体の、回転軸と慣性モーメント

剛体の慣性モーメントの計算は、質点の連続的集合と考え、式 2-38 **によって積分計算になる。ここで、軸からの距離が** r **の一点における密度を ρ、微小質量** dm、**微小体積** dv **とすれば、慣性モーメント** I **は**

$$I = \int r^2 dm = \int r r^2 dv = \iiint r r^2 dxdydz \qquad \text{2-41}$$

で計算される。

図 2-15 **は半径** r、**密度 ρ の球について、直径を軸とする慣性モーメントを計算するものである。球の中心に** xy **座標をとり、中心から距離** y **にある厚さ** Δy **の円盤の、** y **軸周りの慣性モーメントを** ΔI **とすれば、**

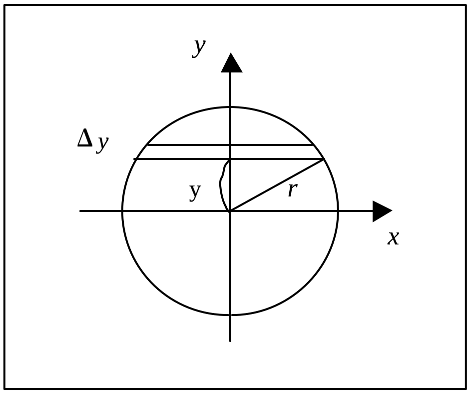


図 2-15 **球体の慣性モーメント**

$$\Delta I = \frac{1}{2}\left(r p x^2 \Delta y\right)x^2 = \frac{1}{2} r p x^4 \Delta y \qquad \text{2-42}$$

となり、ここで、$x^2+y^2=r^2$ **であるから、球の慣性モーメント** I **は**

$$I = 2 \times \frac{1}{2} r p \int_0^r \left(r^2 - y^2\right)^2 dy = r p \int_0^r \left(r^4 - 2r^2 y^2 + y^4\right) dy = up\,\frac{8r^5}{15} \qquad \text{2-43}$$

である。ここで、球の質量を M **とすれば、次のようになる。**

$$M = \frac{4pr^3 r}{3}$$

$$I = \frac{2}{5}Mr^2 \qquad 2\text{-}44$$

慣性モーメントは回転半径を k として

$$I = Mk^2 \qquad 2\text{-}45$$

とする場合がある。剛体の回転半径は式 2-40 から

$$k^2 = \frac{\int r r^2 dv}{M} \qquad 2\text{-}46$$

図 2-16 は剛体の重心を通る回転軸と、慣性モーメントの大きさである。

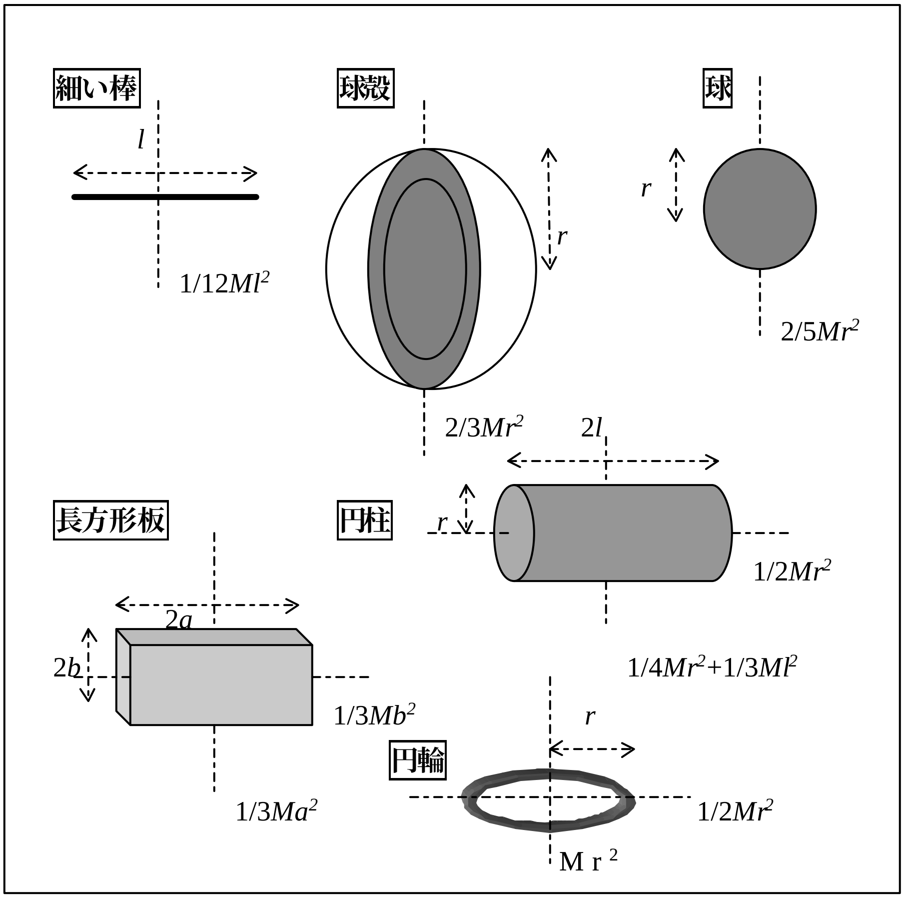


図 2-16　密度一様な剛体の慣性モーメント

慣性モーメントに関する定理

A　平行軸の定理

　図 2-17 のように、剛体内の任意の一点 O と、それに平行で重心を通る軸を G とし、軸に垂直に xy 軸、$x'y'$軸を設定する。

　点 P の座標を (x, y) 、(x', y') 、重心 G の座標を (x_G, y_G)とし、点 O を通る y 軸周りの慣性モーメント I は、

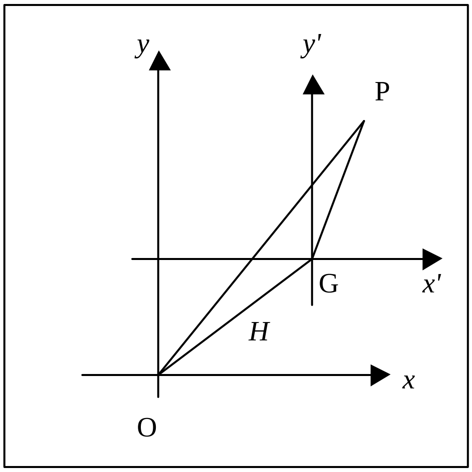


図 2-17 平行軸の定理

$$I = \sum m_i \left(x^2 + y^2\right) \tag{2-47}$$

であり、重心 G を通る y'軸周りの慣性モーメント I_G は

$$I_G = \sum m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right) \tag{2-48}$$

である。

　ここで、$x_i = x_G + x_i'$　$y_i = y_G + y_i'$ を式 2-40 に代入して

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i \left\{\left(x_G + x_i'\right)^2 + \left(y_G + y_i'\right)^2\right\} \\ &= \sum m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right) + 2x_G \sum m_i x_i' + 2y_G \sum m_i y_i' + \sum m_i \left(x_G{}^2 + y_G{}^2\right) \end{aligned} \tag{2-49}$$

である。ここで、重心に関する各質点の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすれば、

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0 \tag{2-50}$$

であり、よって

$$\sum m_i x_i' = 0 \quad \sum m_i y_i' = 0 \tag{2-51}$$

であるから式 2-40 は

$$I = \sum m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right) + \sum m_i \left(x_G{}^2 + y_G{}^2\right) \tag{2-52}$$

となり、従って

$$I = I_G + Mh^2 \qquad 2\text{-}53$$

を得る。ここで、M は剛体の全質量、h は平行軸間の距離である。この関係式を平行軸の定理という。

回転半径で平行軸の定理を示せば

$$I = Mk^2 \quad I_G = Mk_G{}^2 \qquad 2\text{-}54$$

$$k^2 = k_G{}^2 + h^2 \qquad 2\text{-}55$$

となる。

B　平面版の定理

図 2-18 の薄い板状の剛体の一点 P の質量を m_i、xy 座標を (x_i, y_i) 、OP 間の距離を r_i とすれば、O 点における z 軸周りの慣性モーメントを I_z、y 軸周りの慣性モーメントを I_x、x 軸周りの慣性モーメントを I_y とすれば、

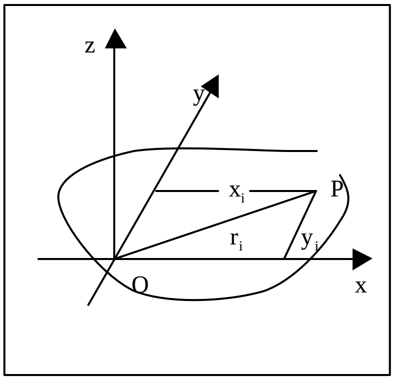


図 2-18 平面板の定理

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i r_i{}^2 = \sum m_i \left(x_i{}^2 + y_i{}^2\right) \\ &= \sum m_i x_i{}^2 + \sum m_i y_i{}^2 = I_y + I_x \end{aligned} \qquad 2\text{-}56$$

となる。

この式は平面板の慣性モーメントを求めるときに使われる。これを平面板の定理という。

第六節　固定軸周りの運動方程式

運動方程式と角運動量

固定軸周りの運動エネルギー式は式 2-36 より

$$d\left(\frac{1}{2}Iw^2\right)=\left(\sum N_i\right)dq$$

であるが、微分すれば、ω＝$d\theta/dt$ より

$$\left(I\frac{dw}{dt}\right)dq=\left(\sum N_i\right)dq \qquad 2\text{-}57$$

となり、

$$\therefore \quad I\frac{dw}{dt}=\sum N_i \quad I\frac{d^2q}{dt^2}=\sum N_i \qquad 2\text{-}58$$

であり、この式を固定軸周りの運動方程式という。ここで、$\sum N_i$ は軸に対する外力のモーメントで、$\sum N_i=0$ のとき、

$$Iw=const \qquad 2\text{-}59$$

である。

この $I\omega$ は軸に関する剛体の角運動量という。また、この式を説明すれば「軸に関する外力のモーメントの和が 0 であれば、その軸に関する剛体の角運動量は保存される」となり、これを角運動量保存の法則という。

複振子（物理振子ともいう）

図 2-19 は複振子であるが、重心を G、G から下ろした垂線の足を点 O とする。いま、O 点を水平な軸にすれば、剛体は G と O を含む鉛直面内で振動する。剛体の質量を M、軸周りの慣性モーメントを I、線分 OG の長さを h、OG が鉛直線となす角を θ とすれば、

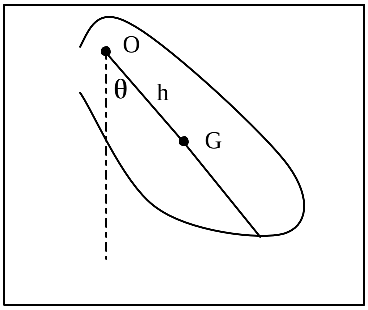


図 2-19 複振子

式 2-50 から

$$I\frac{d^2q}{dt^2} = -Mgh\sin q \qquad \text{2-60}$$

となる。剛体に作用する外力は重力と軸からの抗力であるが、抗力は軸を通過するから、軸の周りにモーメントを持たない。

振幅が小さく、sin θ　θ と近似できるときは、

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{Mgh}{\mathrm{I}}q \qquad \text{2-61}$$

である。これは、単振子の式と同型であるから、周期を T とすれば、$I=Mk^2$ であるから

$$T = 2p\sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2p\sqrt{\frac{k^2}{gh}} \qquad \text{2-62}$$

となる。

ここで、G を通り軸に平行な軸周りの回転半径を k_G とすれば、$I=M\,k_G^2+Mh^2$ だから

$$T = 2p\sqrt{\frac{k_G{}^2 + h^2}{gh}} \qquad \text{2-63}$$

となる。

同じ周期を持つ単振子の長さを L とすれば、その周期 T は

$$T = 2p\sqrt{\frac{L}{g}}$$

であり、この関係を式 2-60 に代入すれば

$$\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = \sqrt{\frac{k^2}{gh}} \qquad \text{2-64}$$

となる。簡単にすれば

$$L = \frac{I}{Mh} = \frac{k^2}{h} \qquad \text{2-65}$$

となる。この長さ L をその複振子の相当長（または、相当単振り子の長さ）という。

ここで図 2-20 のように、OG の延長線上に O から L の長さの点 O'をとり、O'を軸として振動させれば、このときの周期を T'として、線分 O'G の長さを h'、O' 軸周りの回転半径を K' とすれば

$$T' = 2p\sqrt{\frac{k'^2}{gh'}} \qquad 2\text{-}66$$

である。この h' は

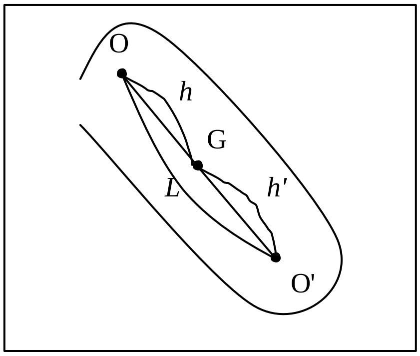


図 2-20 振動の中心

$$h' = L - h = \frac{k^2 - h^2}{h} = \frac{k_G{}^2}{h} \qquad \therefore hh' = k_G{}^2 \qquad 2\text{-}67$$

となる。この関係を使い

$$\frac{k'^2}{h'} = \frac{k_G{}^2 + h'^2}{h'} = \frac{k^2}{h} \qquad 2\text{-}68$$

となり、T=T' であるから、点 O で振動させても、点 O' で振動させても周期は同じである。点 O' を振動の中心という 。この結論を用いて、重力の加速度を性格に測定する装置が、Kater の可逆振子である。

この振子は、金属棒に二つの平行な金属刃 O , O' を固定し、棒に沿って重り M および m を、ねじで移動調節できるようになっており、どちらの刃で支えて振動させても周期 T が、等しくなるように調節すると、2 個の刃の距離が相当長となり

$$T = 2p\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad 2\text{-}69$$

であるから

$$g = \frac{4p^2L}{T^2} \qquad 2\text{-}70$$

となる。この実験では、慣性モーメントを測定する必要がなく、重心の位置を正確に知る必要がない。

第七節　平面運動の運動方程式

運動方程式

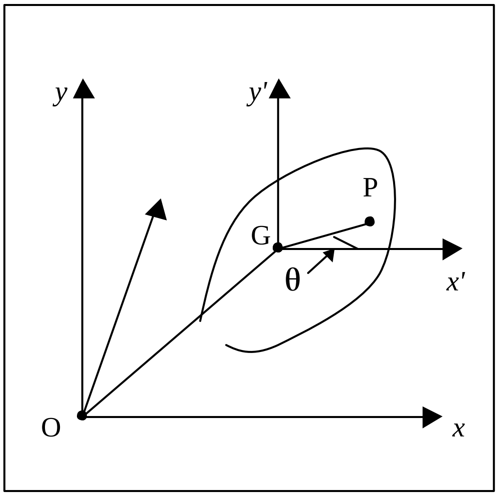


図 2-21 平面運動の運動方程式

図 2-21 のように、xy 軸を重心 G の平面運動内にとり、剛体内の点 P をとって、GP が x 軸となす角をθとし、重心の座標を(x_G, y_G)とする。

剛体の質量を M、重心を通り xy 平面に垂直な軸の周りの慣性モーメントを I_G、剛体に作用する外力の合力 $\vec{F}$ の x 成分を F_x、y 成分を F_y、重心周りの外力のモーメントを N_zとする。

また、重心周りの回転における角速度をωとする。平面運動をする剛体のエネルギー式は、式 2-30 で示されるが、変形して

$$d\left(\frac{1}{2}M\vec{v}_G^{\ 2}+\frac{1}{2}I_G w^2\right)=\vec{F}d\vec{s}_G+N_z dq \qquad 2\text{-}71$$

となり、ここで微分をすれば

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt}+I_G\frac{dw}{dt}dq=\vec{F}d\vec{s}_G+N_z dq \qquad 2\text{-}72$$

となる。剛体の平面運動は重心の並進運動と、重心周りの回転運動を考えなければならないが、上式の両辺の同じ項から、並進運動の運動方程式と回転運動の運動方程式は

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt}=\vec{F}$$
$$I_G\frac{d^2q}{dt^2}=N_z \qquad 2\text{-}73$$

となる。この両式からも判断できるが、両者の運動は独立しており、それぞれの初期条件や運動の環境条件で関係づけられる。

上式を座標成分で表せば

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2}=\sum F_{ix}=F_x$$
$$M\frac{d^2y_G}{dt^2}=\sum F_{iy}=F_y \qquad 2\text{-}74$$
$$I_G\frac{d^2q}{dt^2}=\sum N_{iz}=N_z$$

となる。

斜面上の円柱の運動

図 2-22 のように、傾角αの斜面上を質量 M、半径 r の密度が一様な円柱が転がり落ちる運動において、円柱に作用する外力は、重心 G への重力 M　、斜面との接触点 O における抗力 R、斜面方向の摩擦力 F である。

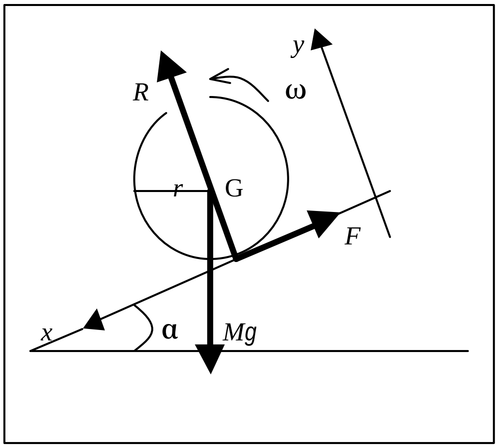


図 2-22 斜面上の円柱の運動

A　滑らず転がり落ちる場合

重心の座標を x_G , y_G 、重心に対する回転の角速度をω 、重心を軸とする場合の慣性モーメントを I_G とすれば、式 2-70 より

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2}=Mg\sin a-F \qquad 2\text{-}75$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2}=R-Mg\cos a \qquad 2\text{-}76$$

$$I_G\frac{d^2q}{dt^2}=rF \qquad 2\text{-}77$$

となる。ここで、$y = r = const$ であるから $d^2y_G/dt^2 = 0$ 、従って

$R = Mg\cos q$ となる。また、円柱が滑らない条件の意味は $v = r\omega$ だから、

$$\frac{dx_G}{dt} = rw \qquad \therefore \frac{d^2x_G}{dt^2} = r\frac{dw}{dt} = r\frac{d^2q}{dt^2} \qquad \text{2-78}$$

である。式 2-70 , 2-70 から

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = r\frac{d^2q}{dt^2} = r\frac{rF}{I_G} = \frac{r^2F}{I_G} = \frac{r^2F}{1/2\left(Mr^2\right)} = \frac{2F}{M} \qquad \text{2-79}$$

が得られ、これを式 2-70 に代入して F を求め

$$F = \frac{1}{3}Mg\sin a \qquad \frac{\mathrm{d}^2x_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin a \qquad \frac{\mathrm{d}^2q}{dt^2} = \frac{2g}{3r}\sin a \qquad \text{2-80}$$

が求まる。

従って、重心は加速度 $(2g/3)\sin a$ で等加速度運動を行い、円柱は重心の周りに角加速度 $(2g/3\mathrm{r})\sin a$ の等角加速度の回転運動をする。

いま、静止摩擦係数をμとすると、mR が円柱に作用する最大摩擦力だから、もし $F \le mR$ であれば、円柱は滑ることなく転がる。従って、その条件は

$$\frac{1}{3}Mg\sin a \le mMg\cos a \qquad \therefore m \ge \frac{1}{3}\tan a \qquad \text{2-81}$$

となる。

B　滑りつつ転がり落ちる場合

この場合は、すでに摩擦力は最大値μR に達しており、滑り摩擦係数をμ'とすれば

$$F = m'R \qquad \text{2-82}$$

であるから、

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin a - mR$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2y_G}{dt^2} = R - Mg\cos a = 0 \qquad \text{2-83}$$

$$I_G\frac{d^2q}{dt^2} = rm'R$$

となる。これを計算すれば

$$\frac{d^2 x_G}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g\mu}{r}\cos\alpha \qquad \text{2-84}$$
$$F = \mu' Mg\cos\alpha$$

となる。

このとき、斜面との接触点の速度を V とすれば、$t = 0$ の初期条件の

$$\frac{dx_G}{dt} = 0 \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \text{2-85}$$

によって計算すれば

$$V = \frac{dx_G}{dt} - r\frac{d\theta}{dt} = g(\sin\alpha - 3\mu'\cos\alpha)t \qquad \text{2-86}$$

となり、$\tan\alpha/3 > \mu'$ のときは $V = 0$ となり、滑りながら転がり落ちる。

第八節　衝撃力による剛体の運動

運動量の変化

棒などの物体をバットで打つように、剛体に衝撃力を作用させ、平面運動を起こさせる事を考える。式 2-70 で示される平面運動の運動方程式を運動量の変化を示す形に書き表せば、

$$d(Mv_x) = \sum F_{ix}dt$$
$$d(Mv_y) = \sum F_{iy}dt \qquad \text{2-87}$$
$$d(I_G\omega) = \sum N_{iz}dt$$

となる。

右辺の上 2 項は任意の点に作用する力積であるが、これを、衝撃力が作用する微小な時間 τ の間で積分すれば全力積 Φ が求まる。従って

$$F_{ix} = \int_0^t F_{ix}\,dt$$
$$F_{iy} = \int_0^t F_{iy}\,dt \qquad \text{2-88}$$

となる。

右辺 3 項は衝撃力のモーメントであるが、$x\,y$ 座標で示すと

$$\sum N_{iz} = \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) \qquad \text{2-89}$$

となる。

微小時間τで積分すれば全モーメントが求まるが、τの間、剛体の位置と作用点はそのままである事を考慮すれば、

$$\sum \int_0^t N_{iz}\,dt = \sum\left[x_i \int_0^t F_{iy} - y_i \int_0^t F_{ix}\,dt\right] = \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) \qquad \text{2-90}$$

となる。ここで、右辺は力積のモーメントを示している。

従って、衝撃力による運動量の変化は

$$Mv_{Gx} - \left(Mv_{Gx}\right)_0 = \sum F_{ix}$$
$$Mv_{Gy} - \left(Mv_{Gy}\right)_0 = \sum F_{iy} \qquad \text{2-91}$$
$$I_G w - \left(I_G w\right)_0 = \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right)$$

となる。

打撃の中心

バットの芯でボールを打てば、グリップを握る手には衝撃が加わらないので、手がしびれないと言われる。バットという剛体の芯とは、剛体の回転運動の中心を示している。

図 2-23 のように、静止している質量 M の剛体の、一点 O に衝撃力を作用させ、その運動を考える。

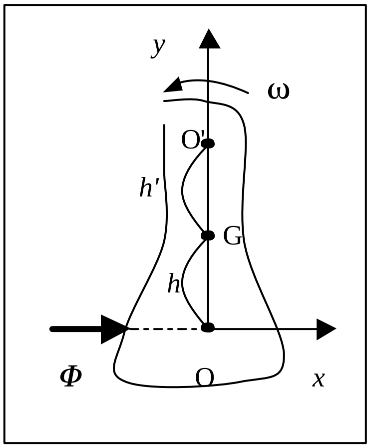


図 2-23 衝撃運動

点 O を通り、y 軸は重心 G を通る $x\,y$ 座標軸をとり、x 軸方向に衝撃力による力積 Φ を与え、重心 G と点 O の距離を h とする。

運動量の変化は、式 2-90 において左辺 2 項は、剛体が静止しているから 0 とおき、右辺の Φ_{iy} も 0 とし、$y_i = h$ と置けば

$$Mv_{Gx} = F v \qquad Mv_{Gy} = 0 \qquad I_G w = hF \tag{2-92}$$

となる。回転半径を k_G とすれば、$I = Mk^2$ を用いて整理すれば

$$v_{Gx} = \frac{F}{M} \qquad v_{Gy} = 0 \qquad w = \frac{h}{{k_G}^2}\frac{F}{M} = \frac{h}{{k_G}^2}v_{Gx} \tag{2-93}$$

となる。ただし、v_{Gx} v_{Gy} は重心 G の速度成分、ωは重心周りの回転運動の角速度である。

ここで、点 O から重心 G を通り過ぎた延長線上に一点 O ' をとり、線分 O 'G 長さを h ' とする。点 O ' の速さを V、重心の速さを v_G とすれば

$$V = v_G - h'w = \frac{F}{M}\left(1 - \frac{hh'}{{k_G}^2}\right) \tag{2-94}$$

となる。

従って、V が 0 になる場合の h ' は

$$h' = \frac{{k_G}^2}{h} \tag{2-95}$$

である。このときの点 O ' は瞬時中心となるから、この剛体は O ' を回転の中心軸として運動する。

このことから、衝撃力を O ' に作用させた場合は O 点が瞬時中心となり、O を回転の中心軸として運動する。

また、O ' 点は瞬間的に運動しないことから、一切の力が作用しない、言い換えると力を受けない。従って、バットでボールを打つ場合に、点 O ' の部分を握り、点 O でボールを当てれば、手には衝撃が伝わらないことになる。このように、O と O ' は互いに他に対する打撃の中心を成しているという。他方、式 2-95 は複振子における式 2-67 と同じであるから、複振子の相当長（相当単振子の長さ）L を求める事ができる。すなわち、

$$L = h + h' \tag{2-96}$$

である。Kater の可逆振子の二つの支点である金属刃の位置が、この 2 点 O と O'である。

回転体の自由軸

図 2-24 は、実線の図のように、天井から紐でぶら下げられた円柱を、紐を軸とする回転を与えたものである。しばらくすると、点線の図のように、もとの紐を軸とする回転状態に移行し、回転は安定する。

回転体の軸には、剛体の各部の遠心力が作用し、軸を安定させるには適当な力で支えなければならない。ところが、重心を通る任意な方向の

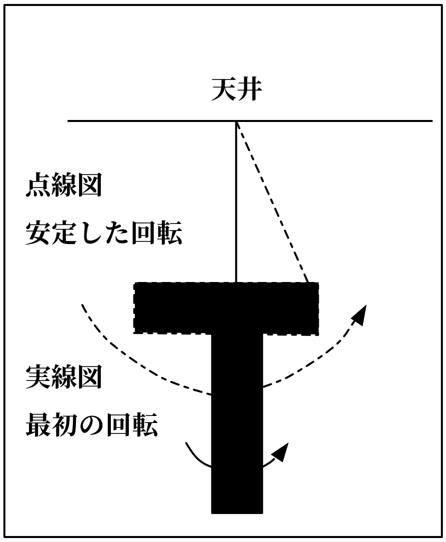


図 2-24　回転体の自由軸

軸を選択すれば、支える力が不要となり、安定して回転する。すなわち、剛体各部の軸周りの遠心力が 0 で、重心の周りの遠心力のモーメントの和が 0 であれば、回転は安定する。この条件を満たす軸を、回転体の自由軸という。

楕円体では、中心を通る 3 つの軸が自由軸であり、円柱の場合はその中心軸と、これに垂直な中心を通る任意な軸が自由軸である。

自由軸のうちで、慣性モーメントの最大な軸の周りに回転するとき、回転は最も安定する。従って、剛体を、任意の軸の周りに回転させれば、剛体は慣性モーメントが最大の自由軸の周りに、回転するように回転自体が変化する。

コマの才差運動

剛体が回転するとき、その軸に直角な線の周りに、力のモーメントを受けるときは、角運動量の方向は変化するが、その大きさは変化しない。

図 2-25 のように、コマを鉛直線から傾けて自転させるとき、コマに作用する力は、重心に重力、コマの心棒に床の抗力の二力である。この二力は偶力であり、コマの心棒に対して力のモーメントを与える。

偶力の効果は、コマの角運動量方向すなわち、心棒の方向を変化させるだけで、角運動量の大きさを変化させない。心棒は次第に方向を変えて、心棒と鉛直線とのなす角θを半頂角とする、円錐面の外縁に沿って円運動をし、コマを倒そうとする偶力に対抗し、コマは倒れない。

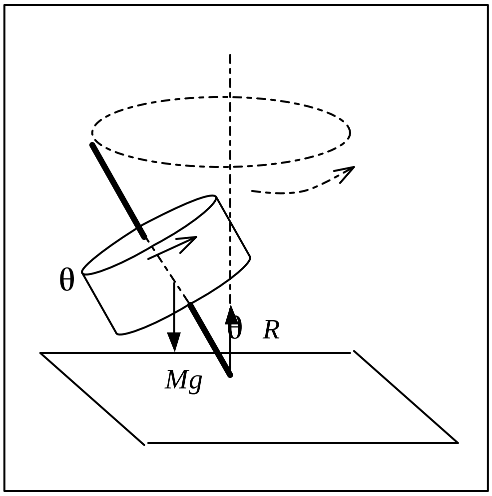


図 2-25 コマの才差運動

このように、回転軸が、それと直角に作用する力のモーメントを受けて、次第に方向を変化するとき、この運動を才差運動という。

回転運動に対する運動方程式をベクトルで示すと

$$\frac{d\left(I\vec{w}\right)}{dt} = \vec{N} \qquad 2\text{-}97$$

である。また、角運動量 $I\vec{w}$ を $\vec{L}$ とすれば、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad 2\text{-}98$$

となる。

図 2-26 のように、角運動量 $\vec{L}$ は自転軸の方向に向くが、外力 $\vec{F}$ によるモーメント $\vec{N}$ がこの軸に垂直に作用するときは、先に記したように、大きさは変わらないで、$\vec{L}$ の方向が $\vec{N}$ の方に変わる。その変化 $\Delta\vec{L}$ の方向は $\vec{L}$ に垂直で、

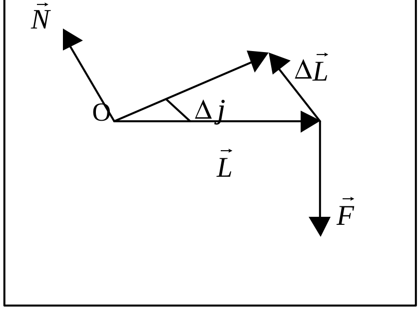


図 2-26 軸の向きの変化

大きさ$|\Delta\vec{L}|$は、$\vec{L}$の回転角をΔj とすれば

$$|\Delta\vec{L} = L\Delta j \,| \qquad 2\text{-}99$$

である。よって、式 2-98 は

$$L\frac{dj}{dt} = N \qquad 2\text{-}100$$

となる。これから、回転の軸を変えるように外力を作用させると、軸は力 $\vec{F}$ の方向ではなく、力と軸により求められるモーメント $\vec{N}$ の方向を追うように、軸自身が向きを変える。これが才差運動で、
そのときの角速度の大きさは

$$\frac{dj}{dt} = \frac{N}{L} = \frac{N}{I w} \qquad 2\text{-}101$$

である。

第九節　剛体の静力学

総質量と重心

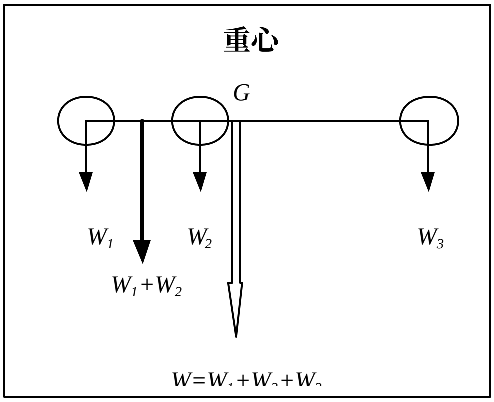


図 2-27　重心

剛体は、様々な密度を持つ小物体の集積体である。小物体には、地球の引力が作用し、地球の中心方向へひかれている。普通なら、バラバラになるのだが、小物体どうしの相互作用による引力・斥力がバランスよく対応し、全体としての大きさや形状が維持されている。無限とも言える、小物体の一つひとつについて、物理学を適用するには、不可能であり、小物体の質量を一カ所に集めた、総質量を考え、それを考慮の対象にする。

総質量は、図 2-27 のように、小物体の重力を合成して得た合重力の大きさを、重力加速度 g で除して求める。合重力の作用点を、重心と呼ぶ。従って、剛体に作用する力は、重心に集積された総質量に作用すると言え

る。

重心 G には、物体全体に作用する重力 W が働き、その点で重力と逆向きで、大きさの等しい力 T で引けば、W と T が釣り合う。このとき上下方向の並進運動は起こらない。また、重心 G を軸とする回転運動も起こらないと考える。

力の作用による、軸に対する回転運動と力のモーメント

物体の回転について、重心 G を軸としたとき、各小物体 1、2、3 に作用する重力 W_1、W_2、W_3 が、どの方向に回転させるかを決めておく。

図 2-28 では、W_1 と W_2 が左回り（時計の針の回転と逆）、W_3 は右回り（時計の針の回転と同じ）に回転させ、前者を正方向、後者を負方向とする。

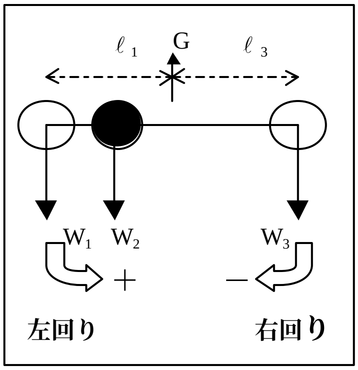


図 2-28　力のモーメント

軸に対して回転させる強さを表す量として、力のモーメントを導入する。記号で N を用いることにする。

力のモーメントは、力の大きさ×力の作用線に軸から下ろした垂線の長さで示される。ここで重力 W_1 と W_3 の力のモーメントを N_1 、N_3 とすれば、

$$N_1 = +W_1\ell_1 \qquad 2\text{-}102$$

$$N_3 = -W_3\ell_3 \qquad 2\text{-}103$$

となる。

N_1 と N_3 は、回転させる強さと回転方向を示す物理量だから、それらの和 N を考えると、

$$N = N_1 + N_3 = (+W_1\ell_1) + (-W_3\ell_3) = W_1\ell_1 - W_3\ell_3 \qquad 2\text{-}104$$

となり、$N = 0$ のとき、左右両方向への回転の強さが等しくなり、回転が起こらないことになる。従って、力のモーメントの和がゼロのとき、回転運動は起こらないと言える。

式 2-100 の最右辺をゼロとして、

$$W_1\ell_1 = W_3\ell_3 \qquad \text{2-105}$$

となり、さらに、

$$\frac{\ell_1}{\ell_3} = \frac{W_3}{W_1} \qquad \text{2-106}$$

となる。この式は、重心 G の位置を求める式でもある。すなわち、重心は小物体の距離を、反比例の関係で内分する、内分比で得られることを示す。

また、式 2-105 は一般にテコの法則として知られ、シーソーや棒はかりなどで応用されている。

剛体に作用する力のモーメントの釣り合い

一般に、力 F が回転軸 O から、距離 L の一点 P に作用するとき、直線 OP と力の作用線がなす角度を θ とすれば、図 2-29 のように、力 F のモーメント N は、次のようになる。

$$N = FL\sin\theta \qquad \text{2-107}$$

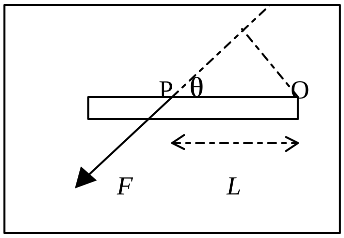


図 2-29 力のモーメント

また、外力 F は

$$F = \frac{N}{L\sin q} \qquad \text{2-108}$$

となる。

力のモーメントは、剛体が回転軸に固定されているとき、力の作用線が軸を通過するならば、大きさが 0 となる。また、固定されていない場合でも、剛体の重心を通過するならば同様である。空気中を運動する物体に、外力を作用させるとき、外力は並進運動と回転運動を同時に起こさせることに注意する必要がある。

剛体が回転しながら運動するときは、その回転をうち消すための、力のモーメントが作用するまで、回転運動は維持される。このことは、式 3-59 で説明されている角運動量保存の法則からも当然である。

剛体に作用する力の釣り合いと、力のモーメントの釣り合い

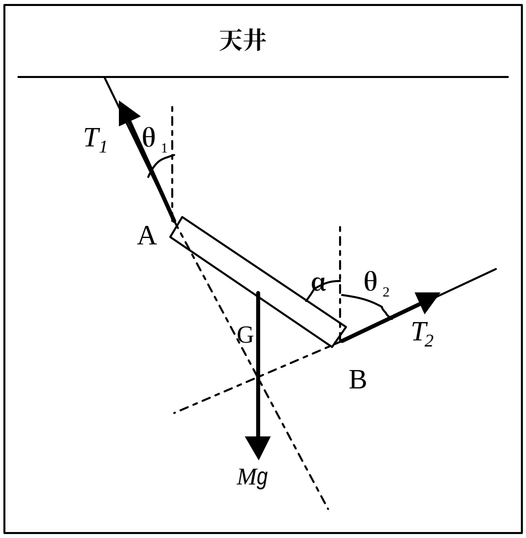


図 2-30 棒の釣り合い

図 2-30 のように、質量が M である剛体 AB の A 点に紐をつけ天井からつるし、B 点につけた紐を引いたところ、剛体は静止した。

ここで、剛体の長さを L、鉛直線に対する、紐が引く力 T_1、剛体、紐が引く力 T_2 の角度を、θ_1、α、θ_2 とする。

いま、剛体 AB に作用する力の釣り合いを考えると、重力 Mg と、紐が引く力 T_1 および T_2 が釣り合うから、水平方向の分力の釣り合いより、

$$T_1 \sin\theta_1 = T_2 \sin\theta_2 \qquad \text{2-109}$$

鉛直方向の分力の釣り合いより、

$$Mg = T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 \qquad \text{2-110}$$

となる。

剛体が外力の作用を受けて、静止している場合は、剛体内のどの点を回転軸と考えてもよい。いま、重心 G を回転軸とし、力 T_1 、T_2 の力のモーメントを N_1 、N_2 とすれば、$N_1 = N_2$ より、

$$T_1 \frac{L}{2}\sin(\alpha - \theta_1) = T_2 \frac{L}{2}\sin\{180 - (\alpha + \theta_2)\} \qquad \text{2-111}$$

となり、整理して、

$$T_1 \sin(\alpha - \theta_1) = T_2 \sin\{180 - (\alpha + \theta_2)\} \qquad \text{2-112}$$

が得られる。この式には、剛体の長さ L が含まれず、二つの力と三つの角度の相互関係となっている。式 2-100 , 2-110 , 2-110 に、質量 M と紐を引く力 T_2 および、剛体の角度αの大きさを代入すれば他の量が計算される。

力のモーメントの計算例

（1）どこまで梯子を上れるか

図 2-31 のように、滑らかな壁と摩擦のある床に、床となす角度が θ の梯子が立てかけてある。梯子の長さと質量を L、M とし、梯子と床との間の静止最大摩擦係数を μ、とする。いま、梯子の下点 B から、梯子の上方 x の距離に質量 m の人が居て、さらに上方へ登ろうとしている。どこまで登れるだろう。

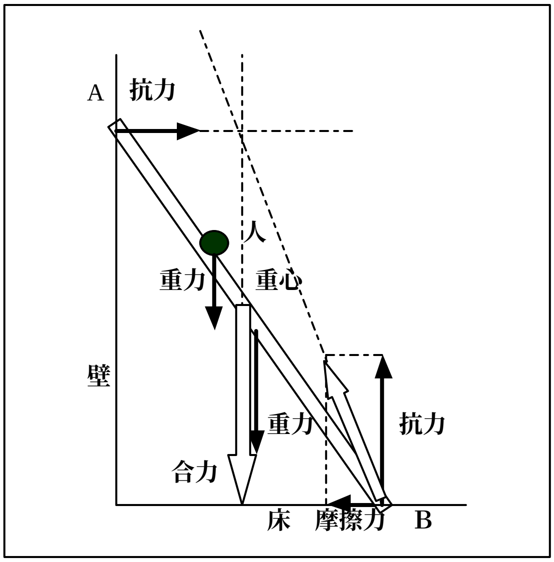


図 2-31 梯子を登る

A と B 点に於ける抗力を F_A、F_B とし、B 点の摩擦力を F とすれば、水平方向の釣り合いから、

$$\mu F_B = F_A \qquad 2\text{-}113$$

鉛直方向の釣り合いから、

$$(m + M)g = F_B \qquad 2\text{-}114$$

となる。

剛体のどの点でも回転軸を考えてよいから、B 点を軸とすれば、B 点の周りの力のモーメントが釣り合うから、

$$F_A L \sin\theta = mgx\cos\theta + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad 2\text{-}115$$

となる。式 2-113 , 2-114 , 2-115 から、F_A、F_B を消去して、x を求めると、

$$x = \frac{L\{2\mu m\tan\theta + M(2\mu\tan\theta - 1)\}}{2m} \qquad 2\text{-}116$$

となる。

（2）　図 2-32 のように、長さ L、質量 M の棒が、壁の一点 A に取り付けられ、他端は紐で B 点に結ばれている。A 点の抗力を R、紐の張力を F とし、棒と紐が、水平となす角度をそれぞれ α、θ とするとき、R と F を求める。

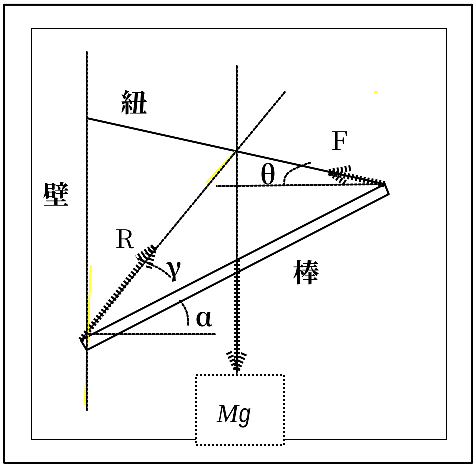


図 2-32　壁と紐による棒の釣り合い

三力 R、F、Mg が釣り合っているから、抗力 R の方向と棒のなす角度を γ とすれば、水平方向と鉛直方向の分力の釣り合いにより、

$$R\cos(\gamma+\alpha)=F\cos\theta \qquad 2\text{-}117$$

$$R\sin(\gamma+\alpha)+F\sin\theta=Mg \qquad 2\text{-}118$$

となり、B 点に対する周りの力のモーメントが釣り合うから、

$$\frac{1}{2}LMg\cos\alpha=LR\sin\gamma \qquad 2\text{-}119$$

が得られる。

これら三式から R、F および、γ を計算すると、

$$R=\frac{Mg\cos\theta}{\sin(\gamma+\alpha+\theta)} \qquad 2\text{-}120$$

$$F=\frac{Mg\cos(\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma+\alpha+\theta)} \qquad 2\text{-}121$$

$$\tan\gamma=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{2\cos\theta-\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)} \qquad 2\text{-}122$$

となる。

なお、この種の問題を解くために、力に関する釣り合いの作図を正確に行うことが求められる。剛体の各部に作用する重力と外力の作用線が一点で交わる事が必要であり、かつその点における合力が得られることである。

また、重力の大きさは、最初に設定し、他の力は力の釣り合い図をもとに計算したした、重力に対する比の大きさとするべきである。

（3）図 2-33 のように、内面が半径 R の半円球をなす陶器の器に、長さ L で、質量 M の細い棒を入れたところ、静止した。陶器と棒との間には、摩擦がないとする。棒の静止した位置と、棒が受ける抗力を求める。

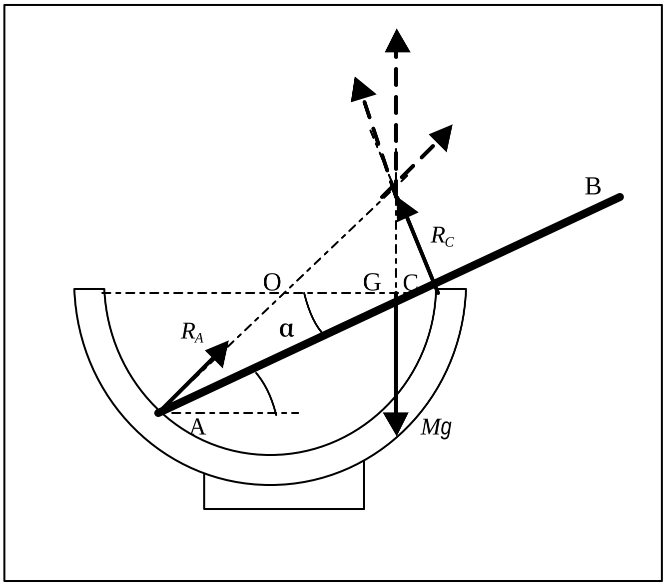


図 2-33 陶器内の棒の釣り合い

いま、棒を AB とし、半円球の中心を O、棒が乗る陶器の端を C、棒と OC となす角度をαとする。また、抗力を R_A、R_C とする。

棒 A への抗力 R_A と C 点での抗力 R_C、重心 G への重力 Mg が釣り合っているから、水平方向と鉛直方向の釣り合いを求めると、

$$R_A \cos 2\alpha = R_C \sin\alpha \qquad \text{2-123}$$

$$R_A \sin 2\alpha + R_C \cos\alpha = Mg \qquad \text{2-124}$$

となり、これを計算して、

$$R_A = Mg \tan\alpha \qquad \text{2-125}$$

$$R_C = \frac{Mg \cos 2\theta}{\cos\theta} \qquad \text{2-126}$$

が求まる。　また、C 点に対する力のモーメントの釣り合いを考えると、

$$Mg \cos\alpha(2R\cos\alpha - \frac{L}{2}) = R_A R \sin 2\alpha \qquad \text{2-127}$$

となる。式 2-125 , 2-126 , 2-127 から、

$$8R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 4R = 0 \qquad \text{2-128}$$

となる。この式を計算し棒の静止位置を角度αで示すことになる。

$$\cos\alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 - 128R^2}}{16R} \qquad 2\text{-}129$$

この棒が陶器内で静止するためには、棒の重心 G **が** C **点より内側に、**B **点は** C **点より外側に、なければばならないから、**

$$\frac{1}{2}L \le 2R\cos\alpha \text{、} 2R\cos\alpha \le L \qquad 2\text{-}130$$

が得られ、2-129 **式を代入して、**

$$4R \ge L \ge \sqrt{\frac{8}{3}}R \qquad 2\text{-}131$$

の条件が求まる。

第十一節　剛体に作用する流体の圧力

圧力とは

　ある面積に作用する力を全圧力、単位面積当たりの力を圧力という。例えば、図 2-34 のように、一辺 a の正方形の板が水平面に置かれ、その上に密度ρ、高さ h の鉄製品の直方体が載せられている。板の面積を S、直方体の体積を V とする。直方体の質量を M とすれば、

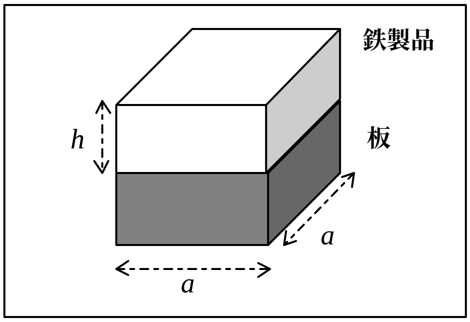


図 2-34　圧力

$$M = rV \qquad \text{2-132}$$

であり、重力を W とすれば、

$$W = Mg = rgV \qquad \text{2-133}$$

ここで、$V = ha^2$ を代入すれば、

$$W = rgha^2 \qquad \text{2-134}$$

となる。

　板の面積は、$S = a^2$ であり、この上に重力 W が載っているから、板に作用する圧力を f とすれば、

$$f = \frac{W}{S} = \frac{rgha^2}{a^2} = rgh \qquad \text{2-135}$$

となる。ここで、重力 W は、面積 S 全体に作用するという意味で、全圧力と呼び、

$$F = fS \qquad \text{2-136}$$

で示す。従って、「全圧力＝圧力×面積」になる。

　これらの関係式は、空気や窒素ガスなどの気体、水やアルコールなどの液体の違いがあっても成り立つ。このため、物理学では気体と液体を区別せず、流体として扱っている。

水中の圧力と単位

水の圧力は、水圧と言い、密度が $1g/cm^3=10^{-3}kg/10^{-6}m^3=10^3kg/m^3$ であるから、2-46 式より、深さ 10*m* の水圧 F は、

$$f=10^3\cdot kg/m^3\cdot 9.8kg\cdot m/s^2\cdot 10m=9.8\cdot 10^4\cdot kg\cdot m/s^2/m^2$$
$$=9.8\cdot 10^4 N/m^2=9.8\cdot 10^4 Pa \qquad 2\text{-}137$$

と計算され、$1N/m^2=1Pa$ ＝ 1 パスカルを用いる。この場合の水圧は 98000 パスカルとなる。気象予報で用いるヘクトパスカルは、$1hPa=100Pa$ であり、98000 パスカル＝980 *hPa*=980 ヘクトパスカルである。

空気中の圧力

地表面における空気の圧力を、大気圧と呼んでいる。大気圧は、空気層に存在する気体粒子に作用する単位面積当たりの重力の合計である。ところが前項のように、空気層の上限が定かではなく、また、地球自転による気流の影響で、粒子層の密度が変化することなどもあり、前項のような計算は不可能である。ただし、瞬間の大気圧を測定することは可能である。瞬間の気圧の測定はフォルタンの気圧計、アネロイド気圧計、毛髪気圧計などで行われている。

物理学や気象学をはじめ広範な分野で、大気圧の一定値を求めて基準化する必要があり、トリチェリーの実験によって測定された値を用いている。

すなわち、図 2-35 のように、水銀を入れた細長いガラス管の、入り口を閉鎖して逆さまにし、水銀槽の水中に入れ、閉鎖を解くと、管内上部は真空となり、水銀漕表面から 76*cm* の高さで管内の水銀が静止する。これは、大気の圧力が、水銀漕内の水銀表面を押し、その圧力がガラス管内の水銀を押し上げたことになる。

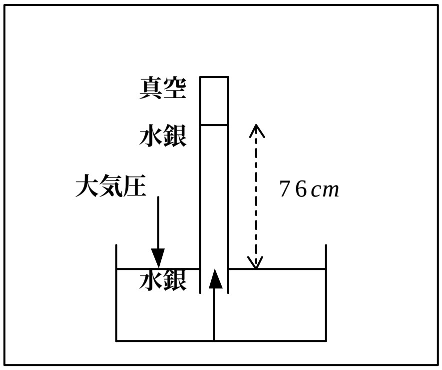


図 2-35 大気圧

水銀の密度は 13.6 g/cm^3 であり、2-46 式より、大気圧 F は、

$$
\begin{aligned}
f &= rgh = 13.6 \cdot g/cm^3 \cdot 980cm/s^2 \cdot 76cm \\
&= 101298 \cdot g \cdot cm/s^2/cm^2 = 101298 \cdot kg \cdot m/s^2/m^2 \qquad \text{2-138} \\
&= 101298 \cdot N/m^2 \cong 101300Pa = 1013hPa
\end{aligned}
$$

となる。ここで、1013 hPa を 1 気圧と呼び、大気圧の基準としている。従って、前項の、水中 10m の深さの水圧は、ほぼ 1 気圧に相当する。

気象学では、高気圧、低気圧と言う呼び方をしているが、1013hPa に対する高低ではなく、隣り合う気圧の大小で、大きい方を高気圧、小さい方を低気圧としているので、注意を要する。

浮力

図 2-36 のように、一定な密度ρの水中に、一辺 a で質量 M、体積 V の立方体が、水平面に沿う上辺の深さ h の位置に存在している。立方体の上面 A と下面 B に作用する全圧力 F_A と F_B は、

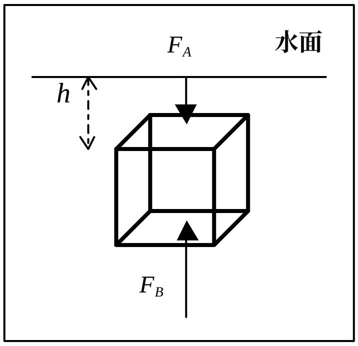


図 2-36 浮力

$$F_A = rgh \cdot a^2 \qquad F_B = rg(h+a) \cdot a^2 \qquad \text{2-139}$$

となり、$F_A - F_B$ を求めると、

$$F_A - F_B = rgha^2 - rg(h+a)a^2 = -rga^3 = -rgV \qquad \text{2-140}$$

となる。この式から、「鉛直方向の全圧力の差は、重力 Mg の方向と反対で、立方体と同体積の水に作用する重力と同じである」といえる。この場合の、鉛直方向の全圧力の差を、立方体に対する水の浮力と呼んでいる。

この浮力は、流体であれば、水と同様の式と浮力の定義が得られる。ここで、重力を重さと言い換えれば、一般に、「浮力は、物体と同体積の流体の重さに等しく、鉛直上方に作用する。」といえる。

立方体の前後と左右の面に対する全圧力は、方向反対で大きさが等しく互いにうち消し合うので、無視できる。従って、流体中の剛体は、鉛直方向に作用し方向が反対の重力と浮力の作用を受けるのみである。

圧力と浮力

（1）浮力を利用しているもの

魚類や飛行船、潜水艦は、浮力を調節することにより、上昇や下降を行っている。この場合、浮力＞重力のとき上昇、浮力＝重力のとき静止、浮力＜重力のとき、下降する。鉛直方向以外に進む場合は、ひれやプロペラなどの推進具が必要である。

また、魚類は浮き袋を有し、飛行船は空気よりも軽い気体を封じた区画を有して、水や空気からの浮力にプラスして用いている。ただ、どんな場合でも結局は、自分に作用する重力との関係で、鉛直方向の運動が規制される。

（2）水面に浮かぶ剛体

図 2-37 のように、密度ρ、高さ H、体積 V、底面積 S の立方体が、密度 r' の液体に浮かんでいる。いま、液面から h だけ立方体が出ているとき、h の値と、h は H の何パーセントか求める。

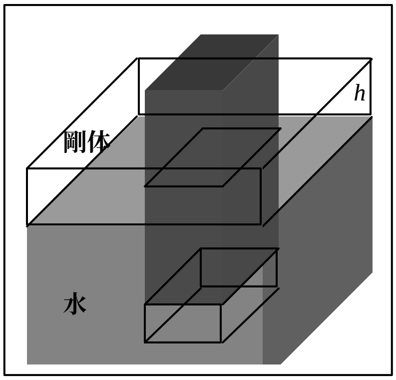


図 2-37　水面に浮かぶ剛体

立方体に作用する重力 W は、$W=\rho gV$ であり、液体から受ける浮力 F は、$F=r'g(1-h/H)V$ であるから、$F=W$ とすれば、$\rho gV=r'g(1-h/H)V$ となり、$h=(1-\rho/r')H$ が得られる。また、h は H の $(1-\rho/r')$ (%)となる。

ここで、立方体を、高さが 100m、密度が 0.917 である 0℃の氷とし、液体を密度が 0.999 である 0℃の水とすれば、水面から出ている氷の高さは、$h=(1-0.917/0.999)\times 100m=8.30m$ となり、氷全体の 8.3%である。従って、水面下には 91.7m の氷が沈んでいる。

氷山が浮かぶ海では、海水の密度が 1.01～1.05 であるから、海面から出ている氷の高さは 9.30～12.7m で、沈んでいる氷は 90.7～81.3m となり、船舶が氷山に衝突する事故がよく起きる。

一辺が 10cm である檜の立方体を水に浮かべるときは、檜の密度が 0.49

であるから、$h=(1-0.49/0.99)\times 10cm=4.9cm$ となる。

ここで、液体に浮かぶための条件は、$1-\rho/r'\geqq 0$ だから、$r'\geqq\rho$ である。この条件外では、剛体は、常に重力＞浮力となり沈んでしまう。

（3）流体中の圧力

図 2-38 のように、密度ρの液体における深さ h の圧力 f は、$f=\rho gh$ であるが、この圧力が作用する方向は、面に対して常に垂直である。これは、深さ h の一点に、一辺の長さが相当小さい立方体を考えると、六つの面に対する圧力は、いずれもその深さが h であるから、いずれの面にも同じ ρgh の圧力が作用し、互いにうち消し合うので、この立方体は動かない。このことは、水槽に入れた液体は、どの部分を観察しても、静止していることを示す。

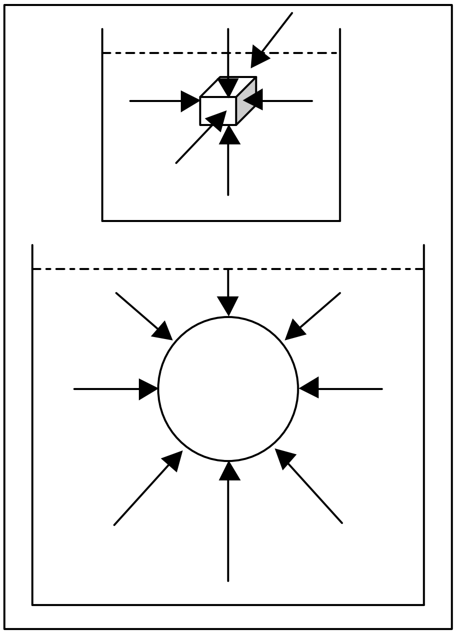


図 2-38 流体中の圧力

従って、液体中では、任意の面を考えたとき、その面の深さが解れば圧力が計算でき、その方向は面に垂直である。例えば、水中に球体を沈めたとすれば、球面のすべてに、深さに応じた圧力が作用するが、その方向は球の中心の方向となる。ここで、それらの圧力を合計すれば、圧力の合力、すなわち、浮力が得られ、その方向は鉛直上方となる。ここで、球体の浮力は、下半球への合力から上半球の合力を引いた値、ともいえる。

（4）連通管（水準器）

図 2-39 のような容器に水を入れると、各管の水面は同じ高さとなる。ただし、管の上部が開いており、大気圧は同じであるとする。これを応用したのが、水平面を測定する水準器である。

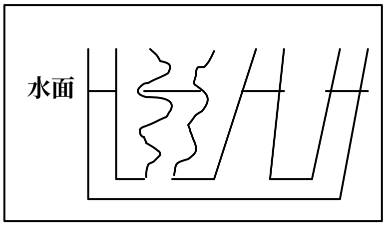


図 2-39 連通管

パスカルの原理

図 2-40 のように、半径 r と R の頑丈な二つの円筒管 A,B が丈夫なホースで連結されている。両方に油性の液体を入れ、液面の上部には、円筒状で、高さ H、同じ密度ρのピストンを載せた。ピストンは同じ水平面で静止している。

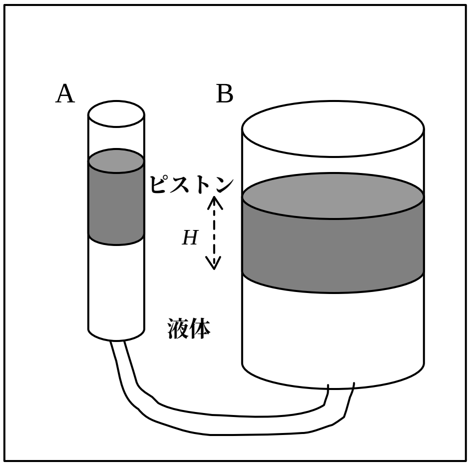


図 2-40 パスカルの原理

ピストン A、B の液面圧力を P_A、P_B とすれば、重力がπρgHr^2、πρgHR^2 であるから、圧力は式 2-46 から

$$P_A = \frac{p r g H r^2}{p r^2} = r g H \qquad P_B = \frac{p r g H R^2}{p R^2} = r g H \qquad \text{2-141}$$

となるから、P_A=P_B となる。これは、両円筒管の圧力が等しいことを示すので、一般に、両管の面積を S_A、S_B としピストンの重力を W_A、W_B とすれば、

$$P_A = \frac{W_A}{S_A} = \frac{W_B}{S_B} \qquad \text{2-142}$$

となり、この式をパスカルの原理と呼んでいる。さらに整理して、

$$W_B = \frac{S_B}{S_A} W_A \qquad \text{2-143}$$

が得られる。管の半径を用いると、

$$W_B = \left(\frac{R}{r}\right)^2 W_A \qquad \text{2-144}$$

となる。

従って、自転車の空気入れで押す力を W_A、ダンプの荷台を傾けるような強い力を W_B とすれば、半径比の二乗倍の力が得られることになる。

第十二節　剛体の変形と応力

剛体を変形させる要因

　自然界に存在する剛体には、様々な作用が加えられている。万有引力をはじめ、固体からの力、静止流体からは圧力、流動する流体からの動圧力、運動する剛体には流体からの抵抗力、流体・固体から加熱される、電磁場におけるローレンツ力などである。

　剛体は作用を受けると、通常は、位置を変化して原型を保とうとするが、複合する作用の場合は、変形することにより、自身の破壊を防ごうとする。また、巨視的には原型を保持しているかに観測されても、微視的には、例外なく、何らかの変形が発生している。

　剛体が変形する場合、必ず、剛体の構造に変化が生じ、その構造変化を原因とした、変化を元に戻そうとする現象が発生する。例えば、ゴム紐を引っ張れば、ゴムは縮んで、元の長さに戻ろうとし、プラスチックの定規を曲げると、元の真っ直ぐな形に戻ろうとする。

　剛体は作用を受けると変形し、作用が消滅すれば、構造変化を原因として原型へ復帰する。ここで、その復帰させる原因を応力と呼んでいる。

剛体変形の種類と応力

　変形と応力は、図 2-41 のようにまとめられる。

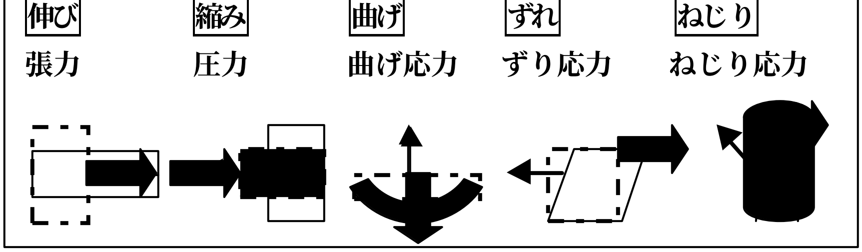


図 2-41 変形と応力の種類

剛体の弾性と塑性（応力―ひずみ線図）

外力が作用すると変形し、外力を取ってしまえば元に戻る事を弾性というが、そうでない場合があり、そのことを塑性という。前項で記述したゴムや定規の例は弾性であるが、必要以上にゴムを引っ張ったり、定規を曲げたりすれば、切れたり、折れたりする。従って弾性は、外力の、ある範囲内で説明できることであり、その範囲を超える場合は塑性となる。

剛体が変形すると、元に戻そうとする応力が生ずるが、その応力は剛体内の構造の変化により作り出される。この場合、剛体構造の変化を「ひずみ」と呼んでいる。

ひずみと応力は一定の関係を持ち、図 2-42 で示した、応力‐ひずみ線図が実験で求められている。このグラフには次の特徴がある。

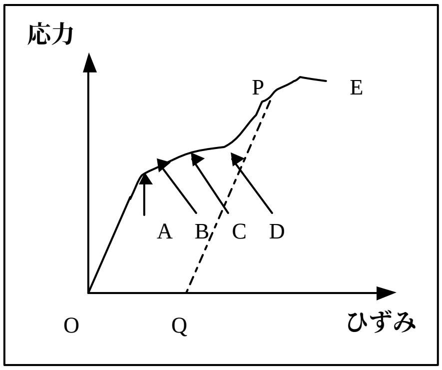


図 2-42

1, 区間 OA は直線で、応力はひずみに比例し、フックの法則が得られている弾性の範囲であるが、A 点を比例限界という。

2, 区間 OB では、外力を取り去ると元に戻るが、微少な変形が残る。B 点を弾性限界という。

3, 区間 BC では、少しの応力の増加で、ひずみが増加する。C 点では応力の増加がなくてもひずみが増す。この点を降伏点という。

4, 区間 CD では応力がなくてもひずみは増加する。

5, 区間 DE では、弾性が少し復活するが、E 点で破壊してしまう。このときの応力を破壊応力という。

6, 図中の PQ 線は、P 点の応力を順次減少した場合のグラフを示し、応力が 0 となったとき、OQ だけひずみが残る。この OQ を残留変形という。

区間 OA の弾性範囲でも、時間を考慮すると、フックの法則は成立しなくなり、ひずみをくり返し与えると破壊する。これを、弾性疲労という。

Hook の法則と弾性定数

弾性限界内で、微少な変形の場合は、どの変形におけるひずみも、応力に比例すると考えられるので、フックの法則を用いている。

フックの法則は、時間を考慮しなければ、応力 F はひずみ X に比例するので、比例定数を k として、

$$F = kX \qquad 2\text{-}145$$

で示される。この比例定数 k を弾性定数と呼び、この値は剛体に特有な定数である。

弾性定数には、一般的に用いられているものに、Young 率（ヤング率）、Poisson 比（ポアッソン比）、体積弾性率、剛性率がある。

Young 率

これは、伸びと縮みに関する定数である。図 2-43 のように、長さ L、断面積 S の一様な棒を、力 F で両方から引っ張ったとき、その伸びた長さを ΔL とすると、フックの法則の定数を E として、

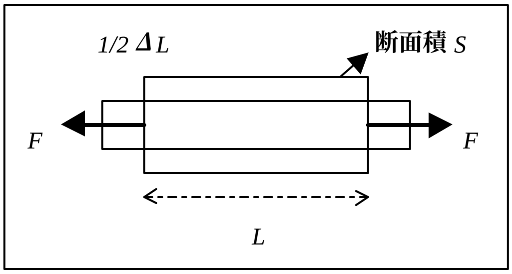


図 2-43 Young 率

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L} \qquad 2\text{-}146$$

となり、整理して、

$$E = \frac{F/S}{L/\Delta L} = \frac{F\Delta L}{SL} \qquad 2\text{-}147$$

となる。

Young 率が大きい物ほど堅くて、伸び縮みせず頑丈である。単位は N/m^2 であり、金は 7.8×10^{10}、軟鉄は 21.19×10^{10}、銅は 12.98×10^{10}、などである。

Poisson 比

前項の棒は伸ばされたとき、伸びる方向と垂直方向に、縮んでいる。このとき、縮みのひずみと伸びのひずみの比を Poisson 比とし、σを用い、

$$s = \frac{\Delta a/a}{\Delta L/L} = -\frac{\Delta b/b}{\Delta L/L} \qquad 2\text{-}148$$

となる。ここで、a と b は棒の伸びる方向に対して左右と上下の縮の長さである。σの値は 0<σ<0.5 であり、クラウンガラスは 0.22、フリントガラスは 0.27、軟鉄は 0.293、金は 0.44 などである。

体積弾性率

体積が V の剛体に、一様な静水圧 p が作用し、その体積が ΔV だけ減少したとき、

$$k = \frac{p}{\Delta V/V} \qquad 2\text{-}149$$

の k を体積弾性率という。単位は N/m^2 で、銅は 18.1×10^{10}、白金は 24.7×10^{10} などである。

剛性率

図 2-44 のように、断面積 S の垂直方向に力 F で直方体をの上部を押したとき、ずり応力により、角度θだけずれたとすれば、剛性率を n として、

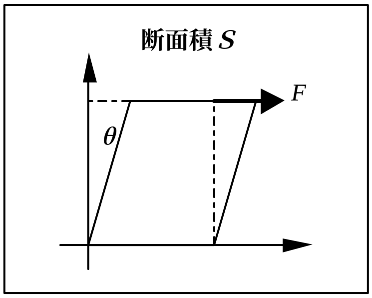


図 2-44 剛性率

$$n = \frac{F/S}{q} \qquad 2\text{-}150$$

となる。

単位は N/m^2 で、大きな物ほどずれにくい。銅は 3.9〜4.6×10^{10}、鋼は 7.9〜8.9×10^{10} などである。

伸びにおける弾性エネルギー

弾性限界内では、変形している剛体は力を取り去ると、元に戻されるから、物体を変形させるのに仕事を要し、元の状態に戻るまで、それが弾性エネルギーとして蓄えられている。

図 2-23 のような、長さ L、断面積 S の棒に力 F を作用させ、x だけ伸ばした場合、2-57 式を変形して、

$$F = E\frac{x}{L}S \qquad \text{2-151}$$

となる。さらに、dx だけ伸ばすに要する仕事 dw は、

$$dw = Fdx = E\frac{x}{L}Sdx \qquad \text{2-152}$$

となる。従って、ΔL だけ伸ばすのに要する仕事 W は、

$$W = \int dW = \frac{ES}{L}\int_0^{\Delta L} xdx = \frac{1}{2}\frac{ES}{L}(\Delta L)^2 \qquad \text{2-153}$$

である。

ここで、剛体の体積を V、密度を ρ、質量を M とすれば、上式は、

$$W = \frac{1}{2}ESL\frac{(\Delta L)^2}{L^2} = \frac{1}{2}EV\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{EM}{r}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 \qquad \text{2-154}$$

となる。

さらに、$\Delta L / L$ は伸びに対するひずみであり、これを e とし、e を受けた剛体が、単位体積に蓄えるエネルギー、すなわち、エネルギー密度を w とすれば、

$$w = \frac{W}{SL} = \frac{1}{2}Ee^2 \qquad \text{2-155}$$

となる。この関係は、静水圧に対する体積変化、外力によるずれ変形についても成立し、体積弾性率を n、剛性率を k とすれば、次の式となる。

$$w = \frac{1}{2}ke^2 \qquad w = \frac{1}{2}ne^2 \qquad .\text{2-156}$$

たわみ（曲げともいう）

図 2-45 のように、一様な棒を、棒と垂直な方向の力を作用させて、曲げる場合を考える。そのときの変形を「たわみ」という。このたわみは、中心点 O から外側の伸びと、内側の縮みとの組み合わせであることが解る。その中間点 P では、伸び縮みしない層があり、中立層という。

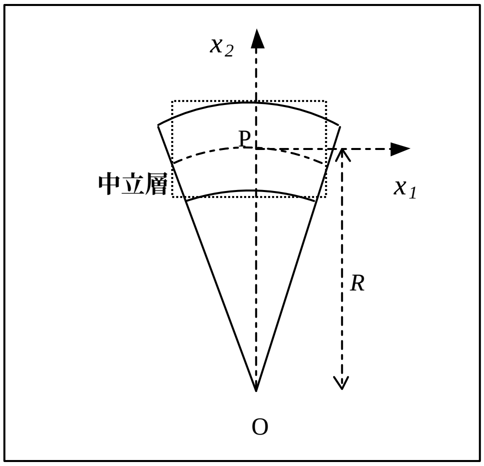


図 2-45 たわみと Young 率

ここで、中立点 P を原点として、三次元直交軸 X_1、X_2、X_3 を導入する。X_3 は軸 X_1、X_2 に垂直である。

X_1 方向のひずみ e_1 と応力 F_1 の関係は、ヤング率を E として、

$$e_1 = \frac{1}{E} F_1 \qquad \text{2-157}$$

であるが、$F_2 = F_3 = 0$ とする。ここで、e_1 は、

$$e_1 = \frac{R + x_2}{R} - 1 = \frac{x_2}{R} \qquad \text{2-158}$$

であるが、棒の断面に作用する力は、たわみの応力だけだから、

$$\int F_1 dx_2 dx_3 = \int E e_1 dx_2 dx_3 = \frac{E}{R} \int x_2 dx_2 dx_3 = 0 \qquad \text{2-159}$$

となる。棒断面における、中立層について、力のモーメントを N とすれば、

$$N = \int F_1 x_2 dx_2 dx_3 = \frac{E}{R} \int {x_2}^2 dx_2 dx_3 \qquad \text{2-160}$$

となり、

$$I = \int {x_2}^2 dx_2 dx_3 \qquad \text{2-161}$$

と置けば、

$$N = \frac{E}{R} I \qquad \text{2-162}$$

が得られる。ここで、N を曲げモーメント、I を断面 2 次モーメントといい、EI をたわみ剛性率という。E と I が大きいほど曲げにくいことになる。

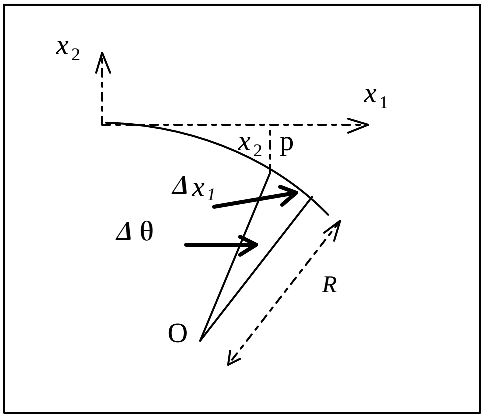


図 2-46 たわみの基礎式

たわみの基礎式

図 2-46 のように、たわみの量が小さいとすれば、曲率 $1/R$ は、

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2 x_2}{d{x_1}^2}$$

であるから、これを 2-73 式に代入し、

$$\frac{d^2 x_2}{d{x_1}^2} = -\frac{N}{EI} \qquad \text{2-163}$$

が得られる。これが、たわみの基本的な式である。

片持梁のたわみ量計算

図 2-47 のように、質量を無視する、長さ L の剛体 AB の一端 A を固定し、他端 B に質量 M の物体をつり下げ、たわみを考える。

A から x_1 の距離の点を P とすると、PB 部分の釣り合いは、ずり応力 F と重力 Mg が釣り合うから、$F=Mg$、また回転についての釣り合いから、力のモーメントを N とすれば、$N=Mg(L-x)$ となり、式 2-74 に代入すると、

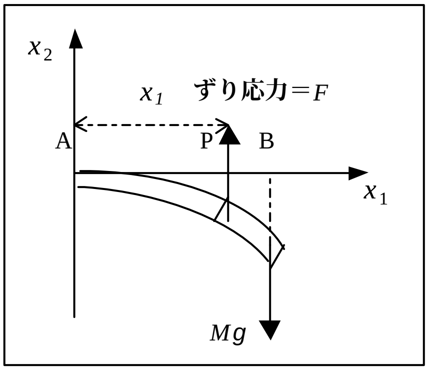


図 2-47 片持梁のたわみ量

$$\frac{d^2 x_2}{dx^2} = -\frac{Mg}{EI}(L - x_1) \qquad \text{2-164}$$

となる。これを積分して、

$$\frac{dx_2}{dx_1} = C_1 - \frac{Mg}{EI} Lx_1 + \frac{1}{2}\frac{Mg}{EI} x_1{}^2 \qquad \text{2-165}$$

であるが、初期条件から、x_1=0 で x_2=0 、C_1=0 となる。さらに積分し、

$$x_2 = C_2 - \frac{1}{2}\frac{Mg}{EI} Lx_1{}^2 + \frac{1}{6}\frac{Mg}{EI} x_1{}^3 \qquad \text{2-166}$$

初期条件が同様のため、C_2=0 、従って、

$$x_2 = -\frac{1}{2}\frac{Mg}{EI} Lx_1{}^2 + \frac{1}{6}\frac{Mg}{EI} x_1{}^3 \qquad \text{2-167}$$

となる。

　剛体の他端 B でのたわみの量をδとすれば、長さが L だから、x_1=L として、

$$d = \frac{MgL^3}{3EI} \qquad \text{2-168}$$

が求まる。

単純梁の中点降下量

　長さ L で、質量を無視する剛体を両端で水平に支点で支え、中央に質量 M の錘をつり下げた。ヤング率を E、慣性モーメントを I としたとき、中点のたわみによる降下量をδとすると、

$$d = \frac{MgL^3}{48EI} \qquad \text{2-169}$$

となる。

　この式は、剛体のヤング率 E を実験で測定するための公式として用いられている。このときの実験装置を Ewing の装置といい、物理学実験では、おなじみである。

ねじれとねじれ振り子

図 2-48 のように、長さ L、半径 a、剛性率 n の一様な円柱の上面を固定し、下面に偶力 N を作用させ、下面での角度をθだけねじった。

中心軸 z に対する任意の断面は、その面内でねじれ、大きさと形が変わらず、そのねじれ角度γは上面からの距離 z に比例するから、ねじれが微少であれば、γ＝θz/L となる。この場合のねじれを「一様なねじれ」と呼んでいる。

ねじり剛性率を C とする場合、次の式となる。

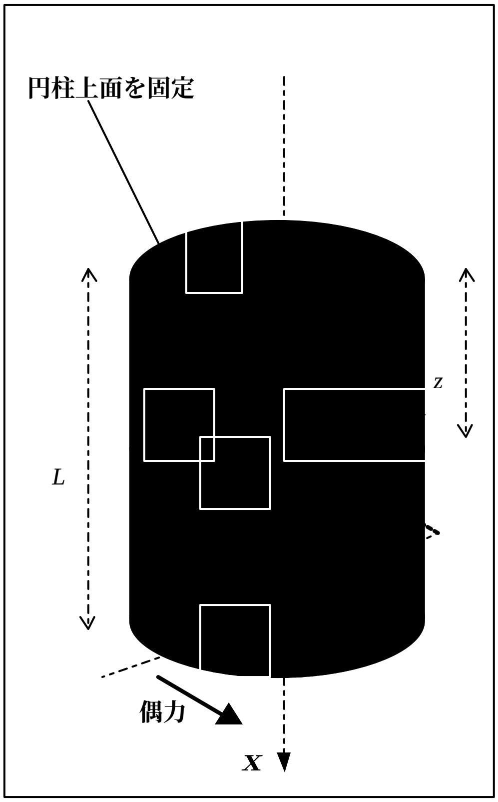


図 2-48 ねじれ振り子

$$C = \frac{pna^4}{2L} \qquad \text{2-170}$$

ここで、偶力のモーメントを N とすれば、

$$N = Cq \qquad \text{2-171}$$

が得られ、この式を用いて、力の精密な測定に使われている、「ねじりばかり」がある。

ねじり振り子は、ねじり剛性率 C の針金の上端を固定し、下端に慣性モーメント I の剛体をつるし、微少角度θだけねじってはなせば、剛体には偶力のモーメント N=－Cθが生じ、運動方程式が、

$$I\frac{d^2q}{dt^2} = -Cq \qquad \text{2-172}$$

となる。

ここで、周期 T は、

$$T = 2p\sqrt{I/C} = 2p\sqrt{\frac{2LI}{pna^4}} \qquad 2\text{-}173$$

となり、単振動を行う。この式で、剛性率や慣性モーメントの測定を行っている。

ねじり振り子の実験

図 2-49 の 1 は、天井にねじり剛性率 C の細い針金をつるし、下端に円管を載せる、慣性モーメント I_0 の台金具がつけられている。

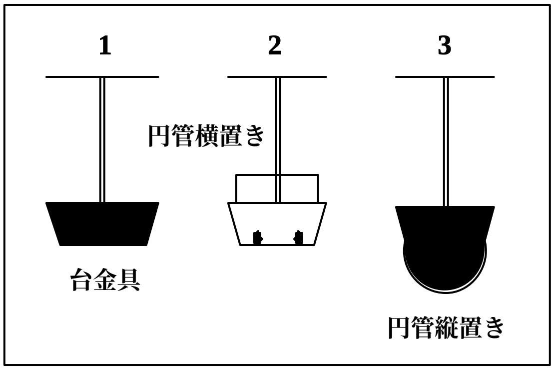


図 2-49 ねじり振り子の周期

2 は、円管を円の面を水平にした横置きに、台金具に載せ、この状態の円管の慣性モーメントを I_1 とする。

3 は、円の面を垂直にした縦置きで、台金具に載せてあり、この状態の円管の慣性モーメントを I_2 とする。

各状態の単振動の周期を、それぞれ、T_1、T_2、T_3 とすれば、

$$T_0^2 = \frac{4p^2 I_0}{C} \qquad T_1^2 = \frac{4p^2(I_1 + I_0)}{C} \qquad T_2^2 = \frac{4p^2(I_2 + I_0)}{C} \qquad 2\text{-}174$$

となり、針金のねじり剛性率 C を、周期 T の測定により三様に求められる。

針金の剛性率 n を精密に測定する場合は、式 2-84 より、

$$n = \frac{8pLI}{a^4 T^2} \qquad 2\text{-}175$$

となり、針金の長さ L と半径 a、錘の慣性モーメント I、単振動の周期 T を測定して計算する。ここで、錘は半径 b、質量 M の円柱を用いるので、慣性モーメントは、

$$\mathbf{I} = M\frac{b^2}{2} \qquad 2\text{-}176$$

を使う。

第三章　流体の力学

第一節　流体の基本的物理量

流体中を運動する剛体の考え方

流体が静止していても、流動していても、剛体がその中を運動する場合は、流体と剛体との、相対速度の関係について着目すればよい。しかも、剛体が静止していて、流体が相対速度で流れてくると考えても、静止する流体に、剛体が相対速度で突き抜けていく、と考えても物理学的には、等価である。

前章までは、剛体や物体などの固体について記述してきたが、今後は、流体の性質や、流体が流動する場合の力学について、考えなければならない。

流動する流体の基本的物理量

静止している流体に、様々な力が作用し、流れ始める。流体そのものは、原子や分子の集合体であるから、それらの構成粒子相互の作用により、微視的には不均一な部分があり、従って一様ではなく、密度という物理量が必要となる。しかも、粒子同士の衝突や、粒子間力の作用による粒子自身の運動も考慮すれば、その激しさを示す、運動量やエネルギーを考える必要もある。さらに、粒子の集合体として、他に対する圧力や、温度、体積などの物理量を決定しなければならない。

一方、巨視的に観測すれば、たかだか、20 数キロメートルの大気内で、空気という流体が流動することに関する気象学や、航空工学、熱力学などの分野が、専門的学問として取り組まれており、水際や水中、海中などの流体の流動に関する学問も発展している。

狭い領域で流動する流体について、物理学として解明するためには、最低限の物理量と、用語や研究方法を準備しておかなくてはならない。定常流か非定常流、流線の導入、連続か不連続、密度、流速などである。

流線と流動状態

種々の容器や空間を流れる流体を、ある部分の構成粒子の集合が、どのような経路を経て、流動しているかを、観測するために、仮想的に、図 3-1 の様な流線を導入し、流線に性格を与えて研究手段としている。

流線密度を考え、密度が大きい部分は圧力が低く、流速が大きいと定める。また、流線が曲線であるときは、流体が運動方向を変化していることを示す。定常な流れは、流線の間隔を等しく描き、乱流や渦などの非定常流の流線はランダムで曲線となる。従って、定常流内に置かれた剛体の周りでは、流線が変化し曲線となる。また、剛体と流体との摩擦を粘性というが、この粘性による流線の変化も起きる。

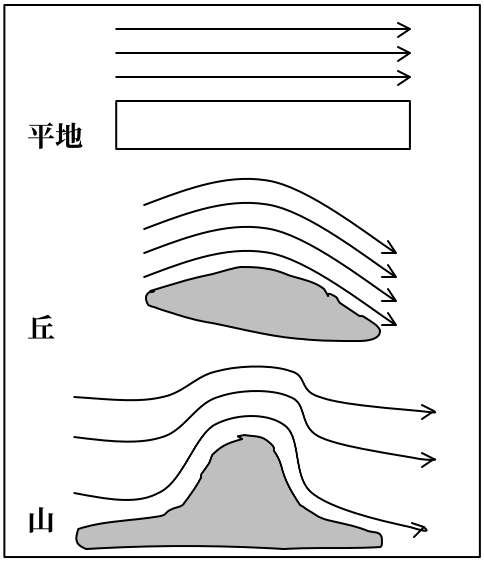


図 3-1 流線

ただし、ここでよく混同しがちな、大気の圧力を示す等圧線や、山の等高線と区別する必要がある。等圧線が密な場合は、気圧の経度が多いことを示し、等高線の密度が大きいところは高低差が大きいことを示す。

流体を構成する粒子数と連続の法則

気体は、どんな種類の気体でも、22.4 リットル＝$22.4\times10^3 cm^3$＝$2.24\times10^{-2}m^3$ 内に 6.023×10^{23} 個の粒子数があり、$1m^3$ では、268.9×10^{23} 個もあり、

約 2.7×10^{25} 個という天文学的数となっている。この粒子数をアボガドロ数と呼んでいる。

液体の粒子数は、粒子の集合体をモル単位で示しており、液体 1 モル（記号で 1*mol* と書く）はその気体の分子数を *g* 単位で表し、そのときの粒子数が、アボガドロ数であると定義されている。例えば水の場合、水の分子は H_2O であり、水 1*mol* の分子数は、水の分子量が 2＋16＝18 だから、18*g* で 6.023×10^{23} 個である。ここで、水 18g＝18cm^3 であるから、1m^3 の水中の粒子数は、約 3346×10^{25} 個となり、気体粒子の約 1240 倍である。

流体が障害物となる剛体が存在しても、膨大な粒子数のため、通常の速さでは、その経路がどれだけ変化しても、流体は途切れることなく、連続して存在するといえる。これを説明するのが連続の法則である。

山を越える気団と流線

図 3-2 のように、山を通過する気団は、A から B まで圧縮状態で上昇し、B から C まで膨張状態で下降している。

A の領域に存在していた粒子数は、B、C でも同じ数であるから、B では、A，C に比べて、圧力が高い。

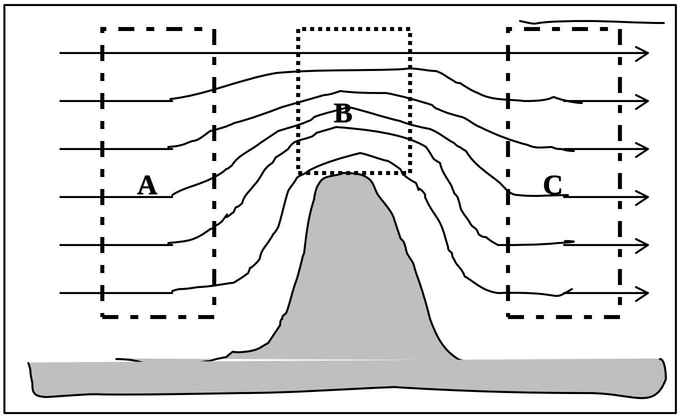


図 3-2 気団と流線

また、最上部の流線以外は、流線が曲線に変化するため、経路が長くなり、各流線は A から C までに、流れる時間が等しいため、流体の速度が増大する。従って、平野部に近いほど、経路が長いので速くなっている。

流線で言えば、B は流線密度が大きく、圧力が低くて、流速が速いといえる。

なお、風上では、上昇気流のため気体が圧縮され、気温が上昇し、雲が発生しやすくなり、風下では逆に、下降気流による気体の膨張と気温が低下し、雲が切れて、晴れ間が増える。現実の大気の流れは、大気圧と気温も刻々変化し、地形の複雑さもあって、気象に携わる人々を困らせている。

流管と流量

流動する流体のある瞬間における、側面が流線からなるような管を流管という。流線や流管は通常、時々刻々変化するが、変化しない場合の流れを定常流という。特に、流線が平行で、速さがどこでも等しい場合を「一様な流れ」という。

流管の微少面積 dS を、その面の垂直方向となす角度がθの方向に、速度 v で流れる密度ρの流体の質量 M は、

$$M = rv\cos qdS \qquad 3\text{-}1$$

である。これは、質量流という流量である。

連続の式

図 3-3 のように、一様に流れる細い流管の A、B 点において、その間で流体の出入りがなければ、断面を垂直に流れる質量流は、連続の法則により等しい。

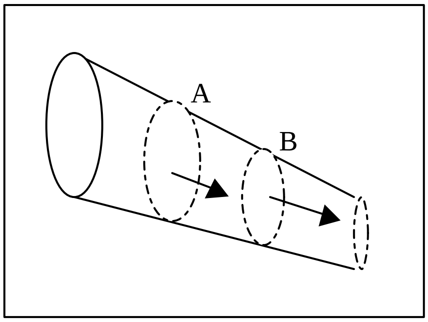


図 3-3 連続の式

A 点の密度ρ$_A$、速さ v_A、断面積 S_A、B 点の密度ρ$_B$、速さ v_B、断面積 S_B とすれば、

$$r_A v_a S_A = r_B v_B S_B \qquad 3\text{-}2$$

$$rvS = const \qquad 3\text{-}3$$

となる。この式を連続の式という。さらに、ρが一定とすれば、

$$vS = Q = const \qquad 3\text{-}4$$

となる。この Q を体積流量という。

第二節　流体の運動方程式

定常流における運動方程式

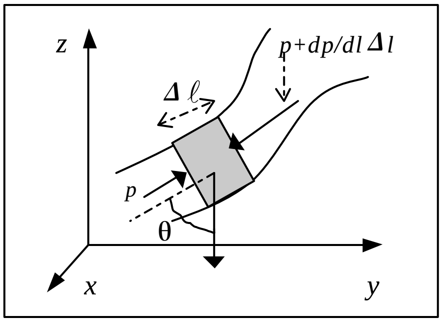


図 3-4 流体の運動方程式

図 3-4 のように、流管内の断面積 S、長さ $\Delta \ell$ の微少部分を考える。密度を ρ、質量を m とすれば、体積が $S\Delta \ell$ だから、

$$\Delta m = rS\Delta \ell \qquad 3\text{-}5$$

であり、この部分に作用する力は、大気圧を p としたとき両断面への圧力差の力 ΔF_1 と、重力の流管方向への分力 ΔF_2 の二つであり、この部分に関する運動方程式は、

$$a\Delta m = -(\Delta F_1 + \Delta F_2) \qquad 3\text{-}6$$

となる。ここで、

$$\Delta F_1 = pS - \left(p + \frac{dp}{d\ell}\Delta \ell \right) S = -\frac{dp}{d\ell}\Delta \ell \cdot S \qquad 3\text{-}7$$

$$\Delta F_2 = \Delta m \cdot g \cdot \cos q = -rg\frac{dz}{d\ell}\Delta \ell \cdot S \qquad 3\text{-}8$$

となり、式 3-6 に代入して、

$$r\Delta \ell \cdot Sv\frac{dv}{d\ell} = -\left(\frac{dp}{d\ell}\Delta \ell \cdot S + rg\frac{dz}{d\ell}\Delta \ell \cdot S \right) \qquad 3\text{-}9$$

となる。これを整理すれば、

$$rv\frac{dv}{d\ell} = -\left(\frac{dp}{d\ell} + rg\frac{dz}{d\ell} \right) \qquad 3\text{-}10$$

が得られる。

式 3-10 は、一般に、流体の運動方程式という。また、この式左辺の v を 0 として、静止流体の場合を考えれば、

$$dp = -rgdz \qquad 3\text{-}11$$

となり、深さ z の静水圧 p の関係式、$p = \rho gz$ が得られる。

Bernoulli（ベルヌーイ）の定理

前項で得られた 3-10 式を変形して、

$$r d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + dp + rgdz = 0 \qquad \text{3-12}$$

となる。また、一本の流線に沿って積分し、

$$\frac{1}{2}v^2 + \int\frac{dp}{r} + gz = const \qquad \text{3-13}$$

となる。これは、定常流における一本の流線上で、左辺は一定であることを示す。これをベルヌーイの定理という。

ここで、流体が圧縮されないと考えれば、ρは一定となるから、

$$\frac{1}{2}rv^2 + p + rgz = P = const \qquad \text{3-14}$$

が得られる。この式は一般的に用いられ、1/2ρv^2を動圧、p を静圧、P を総圧という。ただし、p は大気圧である。

一般に、定常流の解明には、連続の式 3-3 とベルヌーイの定理の式 3-14 を連立させて用いる。

Torricelli（トリチェリー）の定理

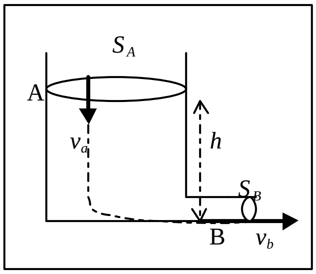


図 3-5 水槽の放水

図 3-5 のように、深さ h のところにある断面積 S_B の小孔 B から、密度ρの液体が水平方向に速さ v_b で吹き出している。液面 A の断面積を S_A、その面での気圧を p_0 とすれば、連続の式から、

$$v_a S_A = v_b S_A \qquad \text{3-15}$$

となる。A、B 両面への気圧は p_0 に等しく、ベルヌーイの定理から、

$$\frac{1}{2}rv_a^2 + p_0 + rgh = \frac{1}{2}rv_b^2 + p_0 \qquad \text{3-16}$$

となる。

式 3-15,3-16 から、

$$v_b = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - S_B / S_A\right)}} \qquad 3\text{-}17$$

が得られる。ここで、S_B が S_A に比べて無視できるほど小さいときは、

$$v_b = \sqrt{2gh} \qquad 3\text{-}18$$

となる。この式を Torricelli の定理という。

Venturi（ベンチュリー）管

図 3-6 のように、連続的に太さが異なる流管の二点 A、B を気体が流れるとき、A と B の流管側壁に、水銀などの液体を入れた細い管をつけ、A と B の圧力差を測定して、流速を求める装置を、Venturi 管という。

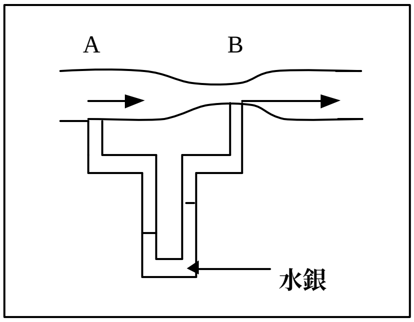


図 3-6 流速の測定

連続の式から、

$$v_A S_A = v_B S_B \qquad 3\text{-}19$$

ベルヌーイの定理から、

$$\frac{1}{2} r v_A{}^2 + p_A + ?gz_A = \frac{1}{2} r v_B{}^2 + p_B + rgz_B \qquad 3\text{-}20$$

となる。ここで、$z_A = z_B$ であるから、

$$v_A{}^2 = \frac{2\left(p_A - p_B\right) S_B{}^2}{r\left(S_A{}^2 - S_B{}^2\right)} \qquad 3\text{-}21$$

が求まる。

A と B の圧力差 $p_A - p_B$ は、水銀柱の高さの差から求められる。

よどみ点と Pitot（ピトー）管

ベルヌーイの定理を用いて、流速を求める装置で、航空機などの高速交通機関の速度を測定するために使われている。

図 3-7 の S 点は、流線の内、S 点に垂直に向かうものが静止するところであり、その上下の流線は曲線を描いて離れていく。この点をよどみ点といい、ここで、流体のエネルギーである動圧がすべて圧力に変わる。

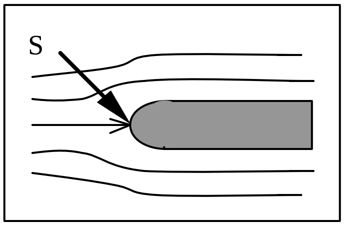


図 3-7 よどみ点

図 3-8 のような装置を Pitot 管という。よどみ点 S での圧力を P_S、A 点での圧力を P_A、流体の速さを v_0 とすれば、よどみ点において、ベルヌーイの定理から、

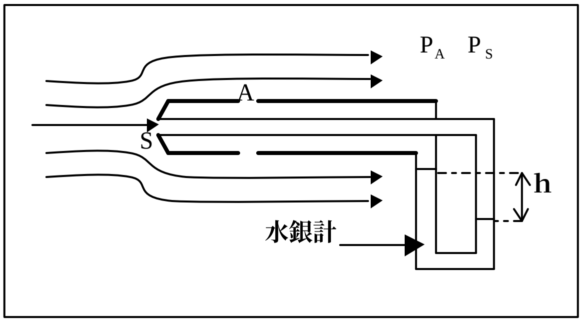


図 3-8 航空機の速さ測定

$$\frac{1}{2} r {v_0}^2 + p_0 = p \qquad \text{3-22}$$

となり、さらに整理して、次の式となる。

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{r}} \qquad \text{3-23}$$

A 点では静圧 p_0 のみが作用し、水銀計の圧力 P_A である。S 点では p が P_S となるから、水銀の密度をρ'とすれば、

$$p - p_0 = P_S - P_A = ?'gh \qquad \text{3-24}$$

である。よって、この式を 3-23 式に代入し、次の結果が求まる。

$$v_0 = \sqrt{\frac{2rgh}{r}} \qquad \text{3-25}$$

これは、高速の航空機や列車などの、速さを測定するのに用いられている。

第三節　粘性流体の流動

ずり応力と粘性係数

前節までは、流体について、張力とずり応力がなく、圧力のみ考えてきた。従って、流管内の流動は、障害物がなければ、どこでも一様であるとした。しかし、現実の流体は、分子や原子の集合体であるから、それらの相互作用による作用反作用の力が関与し、その力が「粘りけ」を示し、その性質を粘性という。従って、粘性はずり応力の別の説明と考えればよい。

図 3-9 のように、流体の流れは、剛体の面で速さがゼロであり、離れるほど速さを増している。このことは、川を流れる水の流れを観察すれば確認できる。また、曲線状に作られた、流水プールの水の流れは、深さが同じでも、曲がる外側を流れる水は、内側に比べて速いことも観察できる。

このことは、連続の法則と、同じ時間で、長い距離を流れる外側の方が速くなることから説明される。

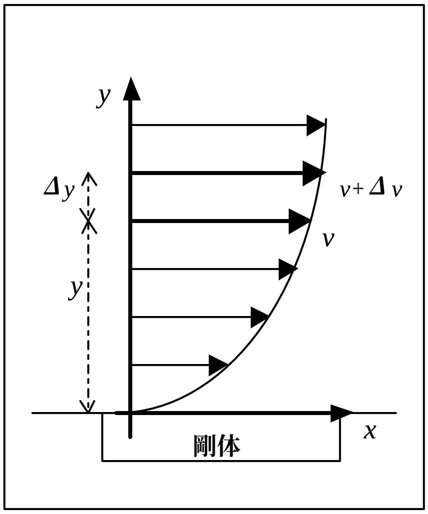


図 3-9 流体の粘性

隣り合う流体は、互いに、ずり応力で相手に作用している。すなわち、遅いほうは速いほうを遅くしようとし、速いほうは遅いほうを速くしようとする。

図 3-9 は、流れの方向を x、その直角方向に y 軸を導入してあり、いま、x 軸から y の点を流れる微少流体を考える。その速さを v とし、距離が Δy だけ大きい微少部分の速さを $v+\Delta v$ とする。このときの力は、ずり応力で、大きさ τ は次の式となり、この式の η を粘性係数という。

$$t = h\frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad \text{3-26}$$

粘性流体の、速度分布と体積流量

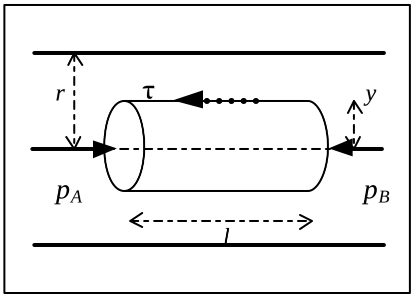


図 3-10 粘性抵抗

図 3-10 のように、半径 r、長さ l の管が水平に置かれ、その中を粘性係数がηの流体が流れている。半径 y の円柱 AB の、端面 A と B に作用する全圧力 P_A、P_Bの差は、圧力を p_A、p_B とすれば、

$$P_A - P_B = (p_a - p_b)py^2 \qquad 3\text{-}27$$

であり、この値が、流体を動かそうとする働きをする。これに対して、ブレーキの働きをするのが、粘性による摩擦力であり、それを粘性抵抗と呼んでいる。

図中の、円柱の中心から距離 y の側面について、速度勾配は dv/dy であるから、ずり応力τは、

$$t = h\frac{dv}{dy} \qquad 3\text{-}28$$

である。従って、側面全体のずり応力、すなわち、粘性抵抗は、

$$2py\ell t = 2py\ell h\frac{dv}{dy} \qquad 3\text{-}29$$

となる。

円柱状の流体は流れているが、速さに変化がない、一様な流れであるから、加速度がゼロ、すなわち、上記の二力は釣り合っている。釣り合いの式から、

$$(p_a - p_b)py^2 + 2py\ell h\frac{dv}{dy} = 0 \qquad 3\text{-}30$$

となる。さらに整理して、

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2h}\frac{p_a - p_b}{\ell}y \qquad 3\text{-}31$$

が得られる。

式 3-31 を解くための境界条件は、$y=r$ の固体壁で、速さがゼロである。

積分定数を *C* とすれば、3-31 式は、

$$\int dv = C - \frac{p_A - p_B}{2h\ell}\int y dy \qquad \text{3-32}$$

$$v = C - \frac{p_A - p_B}{4h\ell}Y^2 \qquad \text{3-33}$$

となる。ここで、*y*=*r*、*v*=0 を代入して、

$$C = \frac{r^2\left(p_A - p_B\right)}{4h\ell} \qquad \text{3-34}$$

これを 3-33 式に代入し、

$$v = \frac{\left(p_A - p_B\right)\left(r^2 - y^2\right)}{4h\ell} \qquad \text{3-35}$$

が求まる。管の中心における速さを v_0 とすれば、*y*=0 として、

$$v_0 = \frac{r^2\left(p_A - p_B\right)}{4p\ell} \qquad \text{3-36}$$

となり、最大である。

式 3-35 は、流れの方向の管断面では、放物線を示すから、図 3-11 のような、速度分布となり、立体の管では、その放物線が管の中心を軸とした回転放物面に分布することが解る。

粘性流体が管の中で流れる場合、*y* と *y*+*dy* 間を流れる体積流を *dQ* とすれば、*dQ*=2π*yvdy* であるから、式 3-35 の *v* を代入すると、

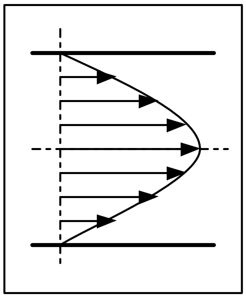


図 3-11 流速分布

$$dQ = \frac{p\left(p_A - p_B\right)\left(r^2 - y^2\right)ydy}{2ph} \qquad \text{3-37}$$

となり、管全体での体積流を *Q* としたとき、0 から *r* まで積分して

$$Q = \frac{p\left(p_A - p_B\right)}{2h\ell}\int_0^r\left(r^2 - y^2\right)ydy = \frac{pr^4\left(p_A - p_B\right)}{8h\ell} \qquad \text{3-38}$$

が得られる。この結果は粘性係数ηを測定するために用いられている。また、この結果を Hagen-Poiseuille（ハーゲン・ポアズイユ）の法則という。

層流・乱流と Reynolds（レイノルズ）数

ハーゲン・ポアズイユの法則に従う円管内の流れを層流、従わない流れを乱流という。レイノルズが見いだし、次の式で示される Reynolds 数 R を、流体がどんな流れかたをするか、の判断をするために定めた。

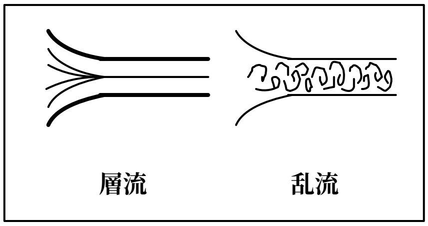


図 3-12 層流と乱流

$$R = \frac{Urr}{h} \qquad \text{3-39}$$

ここで、U は流速、ρ は密度、r は管の半径、η は粘性係数である。また、上式で分母と分子の単位が打ち消され、R は無単位の数のみで示される。

R が 1160 のとき、ハーゲン・ポアズイユの法則に従うか否かの境になっている。また、層流と乱流の変わり目の R を限界レイノルズ数という。

流体の抗力と抵抗係数

流動する流体中に剛体を置くと、流体から抵抗を受ける。これを抗力という。、面積 S の流管を、速さ U で流れる、密度 ρ の流体が、受ける抗力を D とすれば、

$$D = C_D \frac{1}{2} rU^2 \qquad \text{3-40}$$

が得られている。この定数 C_D を抵抗係数という。$1/2PU^2$ は動圧だから、C_D は無名数である。

ストークスは、直径 d の球体が、流速 U、密度 ρ、粘性係数 η の流体中で受ける抗力 D を次の式で示している。

$$D = 3phdU \qquad \text{3-41}$$

これを、Stokes（ストークス）の法則という。

このとき、球体の表面積を S とすれば、$S＝\pi d^2/4$ であるから、抵抗係数 C_D を求めると、

$$C_D = \frac{2D}{rU^2S} = \frac{24h}{rdU} \qquad 3\text{-}42$$

となり、3-39 式から、

$$\frac{h}{rdU} = R \qquad 3\text{-}43$$

を代入して

$$C_D = \frac{24}{R} \qquad 3\text{-}44$$

の関係が得られる。

抵抗係数とレイノルズ数の関係と Karman（カルマン）渦

抗力 D はレイノルズ数 R により、変化することが確かめられている。その R と C_D のグラフから、次のことが解明されている。

1、R＝10 程度までは、ストークスの法則が成り立ち、静かに流れる。

2、R＝10～30 では、図 3-13 の A のように、一対の渦が生ずる。渦内は流速が速く、圧力が減少し、他との圧力差が生じて抵抗となり、これをうず抵抗という。

3、R＝40 程度を越えると、B のカルマン渦という、渦列が生ずる。

4、R＝10^5 を越えると、乱流となる。この状態では、乱流内の圧力が 低く、前方との圧力差が抵抗となる。これを圧力抵抗という。

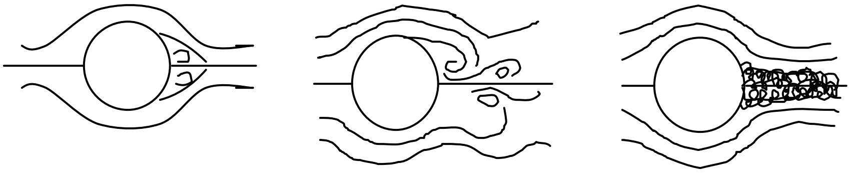


図 3-13 レイノルズ数とカルマン渦

揚力

飛行機の翼や、ヘリコプターのプロペラなどは、流れに対して直角方向に揚力を受ける。図 3-14 は一般的な翼の形である。

密度ρの空気中を、流れに対する翼面積 S の飛行機が、速さ U で飛行しているとき、揚力を L、比例定数を C_L とすれば、

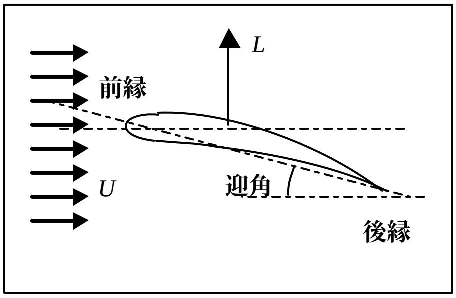


図 3-14 翼の揚力

$$L = C_L \frac{1}{2} r U^2 \qquad 3\text{-}45$$

で表わされる。この C_L を揚力係数といい、翼型や迎角により異なる。

揚力が発生するのは、流体が、翼の上面を流れる距離は、下面より長く、従って、速さが速くなる。このことを、ベルヌーイの法則から考えると、上面よりも下面の圧力が大きいといえる。この圧力差が、鉛直上方への揚力となる。

地上から上空へ、高度が高くなるほど、密度が小さくなるので、揚力が減少し、飛行できる高度には限界がある。

Magnus（マグヌス）効果（ボールのホップやカーブ）

図 3-15 のように、ボールを回転させて右方向へ投げた。ボールに対する空気の流れは、ボールの上方で、流線が密となり流速が大きく、下方では、流線が疎となり流速は小さくなっている。このために、

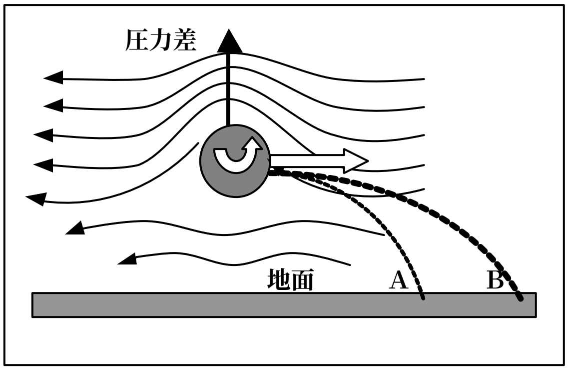


図 3-15 ボールのホップ

下方の圧力が上方より大きくなり、この圧力差の力が鉛直上方へ作用し、ボールを落下させる重力の作用を弱めるため、回転させずに投げたときの落下点 A よりも遠方の B 点に落下する。この効果をマグヌス効果という。

回転方向を逆にすれば、圧力差の力が鉛直下方に作用し、A 点の手前に落下する。このボールはドロップしたと言っている。

また、図 3-16 のように、ドーム球場の天井からグランドを見下ろしたとき、矢印の回転を与えられたボールは、左の方向へカーブすることが解る。

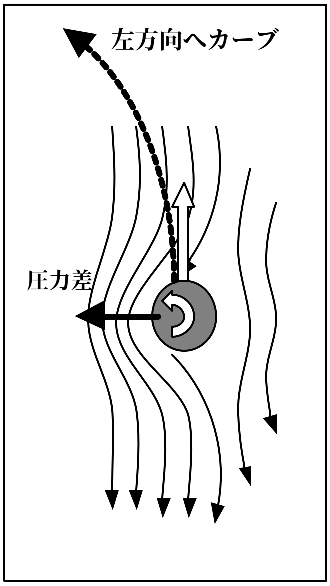


図 3-16 ボールのカーブ

このマグヌス効果は、回転しながら流体中を運動する場合に必ず起こる現象である。球を用いるスポーツでは、球表面の形状が大きな要素となっている。

例えば、硬式野球のボールには、皮の縫い目があり、図 3-16 の場合では、その縫い目が、回転の働きとともに左側の空気を引っかけて、より速める働きをする。右側では、空気を押しとどめて、より遅くする。このため、プロ野球のボールは、非常によく変化する。

また、ゴルフボールには、表面に、小さな半球状の窪みを、たくさん作ってあるが、窪みで生ずる渦流の効果により、マグヌス効果による圧力差の力が大変大きくなり、通常の、放物線を描いて落下する距離よりも、はるかに遠方へ飛ばせるのである。

球表面がツルツルの場合は、回転を与えると、安定した経路を飛んで行くが、無回転の場合は、流体の流れが通常乱れており、ちょっとした流れの違いにより回転が起こり、それによる圧力差が生じ、ボールの経路は不安定となる。これを利用しているのが、バレーボールの木の葉サーブであり、プロ野球のフォークボールである。

ボールの経路が不安定になる原因に、カルマン渦の作用もあることが解っている。

第四節　表面張力と毛管現象

表面張力

アイロンをかけるときの霧吹きや、子供が遊ぶシャボン玉は球体である。これは、水や石鹸液の表面が縮もうとし、表面積を小さくするためである。この、表面を縮ませる力を表面張力という。また、毛細管内の液面が上昇する毛管現象も表面張力の例である。

この表面張力の単位は N/m であり、$1N/m = 1Nm/m^2 = 1J/m^2$ であるから、単位面積当たりのエネルギーである。

表面張力がする仕事

図 3-17 のように、細い針金で長方形の枠を作り、AD 方向に垂直に動くことのできる軽い棒 PQ をのせ、ABPQ に石鹸液などの膜を張る。いま、PQ を右方へ x だけ引いたとき、液の膜が左方向へ表面張力 T で引き戻している。このとき、右方に引く力は液の片面で Ta だから、両面では $2Ta$ となり、外力が x だけ液面を動かす仕事を W とすれば、

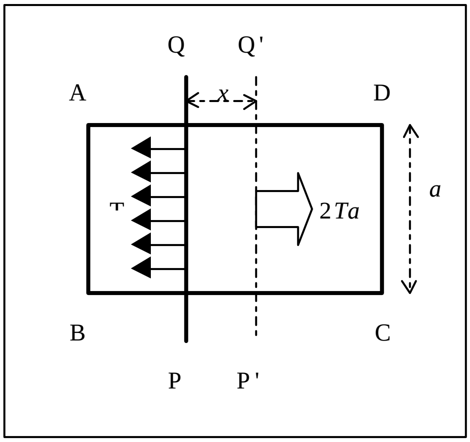


図 3-17 表面張力

$$W = 2Tax \qquad \text{3-46}$$

となる。

従って、表面張力 T は次の式となり T の単位は J/m^2 であることが解る。

$$T = \frac{W}{2ax} \qquad \text{3-47}$$

固・液・気体の接触と接触角

固体に液体が接触するとき、必ず、液体はその上方に存在する、気体にも接触している。図 3-18 のように、液体が固体の壁に接触するとき、液面はある曲線を描き、壁と曲線との角度を接触角といい、αで示す。

接触角はガラスと水の場合、8°くらいで、ガラスと水銀では 140°，ガラスとアルコールでは 0°である。従って、ガラス管内の水の表面は下にへこみ、水銀では上に盛り上がる。

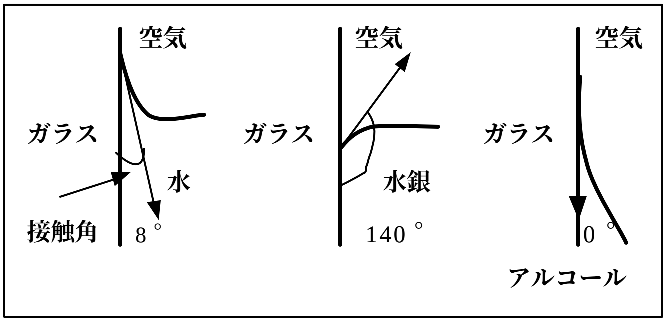


図 3-18 表面張力と液面曲線

固・液・気体間の表面張力の釣り合い

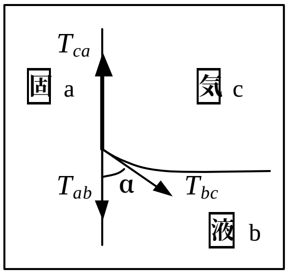


図 3-19 三相の釣り合い

図 3-19 のように、固体 a、液体 b、気体 c の間の表面張力を、それぞれ、T_{ab}、T_{bc}、T_{ca} とすれば、三力の作用点 P における、力の釣り合いの式は、

$$T_{ab} + T_{bc}\cos\alpha = T_{ca} \qquad 3\text{-}48$$

となり、整理して、

$$\cos\alpha = \frac{T_{ca} - T_{ab}}{T_{bc}} \qquad 3\text{-}49$$

となる。この式から、P 点が存在するための条件は、

$$\left|T_{ca} - T_{ab}\right| \le T_{bc} \qquad 3\text{-}50$$

となる。また、$T_{ca}>T_{ab}$ のとき、α< 90°で壁面を上方までよくぬらす水の場合、$T_{ca}<T_{ab}$ のとき、α> 90°でぬらしにくい水銀の場合となる。

水面に浮かんだ油滴と油膜

図 3-20 のように、水面上に油滴が浮いているとき、接触点 P での表面張力の釣り合いを考える。

水、油、空気の三者間における表面張力を、それぞれ、T_{ab} 、T_{bc}、T_{ca} とすれば、接触角をα、βとして、

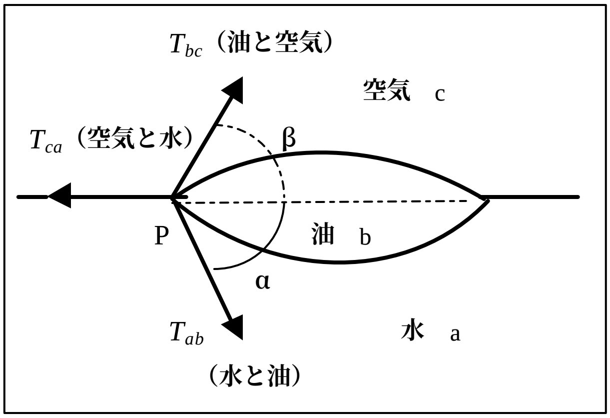


図 3-20 油滴と表面張力

$$T_{ab}\cos\alpha + T_{bc}\cos\beta = T_{ca} \qquad 3\text{-}51$$

となる。

上の式から、cosα＝cosβ＝1 のとき、油を縮めようとする合力である左辺が最大となる。このとき $T_{ca} > T_{ab} + T_{bc}$ であれば、油滴は左方へ引っ張られ、水面全体に油膜を広げることになる。このとき、角度αとβには無関係である。

表面張力と圧力

表面張力は液面を縮めようとするため、液面は曲面状に変化する。水滴などが球体になるのはこのためである。いま、図 3-21 のように、曲面の二辺 x と y の曲率半径を r_1 と r_2 とし、表面張力を T、液面が球面になることにより発生する、液体内部の圧力を Δp とすれば、

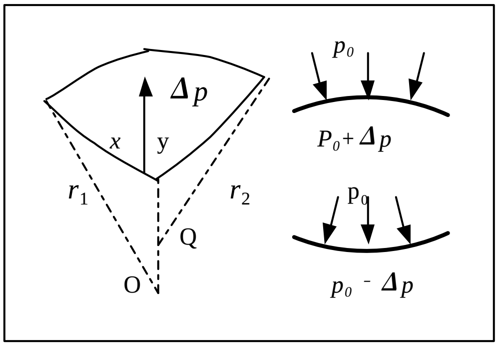


図 3-21 表面張力と圧力

$$\Delta p = T\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \qquad \text{3-52}$$

となる。曲面が球面の場合、r_1=r_2であるから、これを r として、

$$\Delta p = \frac{2T}{r} \qquad \text{3-53}$$

となる。また、曲率半径が液体の上部にある場合は、3-52 式の右辺が負となり、液体内の圧力は Δp だけ減少する。

毛管現象

図 3-22 のように、管の半径を r、球面の半径を R とし、球面に接する液中の圧力 p と、大気圧 p_0 との関係式は、

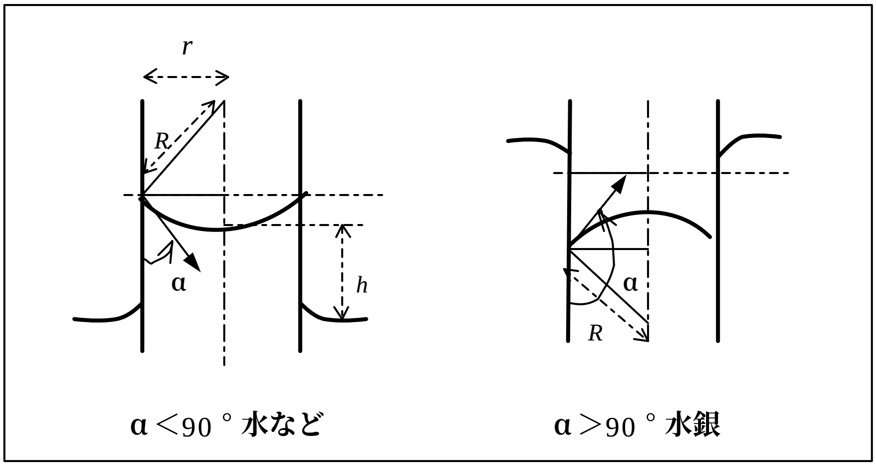


図 3-22 毛管現象

$$p_0 - p = \frac{2T}{R} = \frac{2T\cos a}{r} \qquad \text{3-54}$$

であり、液体の密度をρ、液中の高さを h とすれば、p＋ρgh=p_0だから、これらの二式から次の関係式が求まる。

$$h = \frac{2T\cos a}{rgr} \qquad \text{3-55}$$

第五節　剛体に対する流体の抵抗力

流体中を運動する剛体が流体から受ける抵抗

物体と流体との相互作用は、剛体について考え、次の三種に分類される。

（1）気体中の運動

（2）気体と液体または、気体と固体との境界層での運動

（3）液体中の運動

（1）は日常よく観察される現象で、飛行機・グライダー、ヘリコプターなどの航空機、ボールを用いるスポーツ、ジャンプスキーやスカイダイビング、などである。これらの場合、物体に作用する力は、鉛直方向の重力と浮力・揚力、水平方向の推進力と流体からの抵抗力、である。

図 3-23 は、飛行機について、それらの力関係を示したものである。物体はそれらの力関係により、前方へ運動する。ただし、揚力と抵抗力は飛行機が前進しているときにしか生じない。飛行機に関する、すべての力が釣り合うとき、そのときの瞬間の速度で、等速度直線運動を続ける。

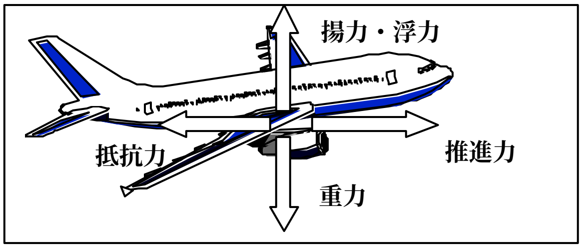


図 3-23 流体中の剛体に働く力

揚力は、主翼面積とフラップによる迎角の増加により獲得し、推進力はプロペラやジェットエンジンにより得られるが、それに対する流体の抵抗力も増大する。方向の変更は、尾翼のフラップにより制御している。

ヘリコプターは、飛行機と異なり、空中で静止することができるのは、揚力がローターという、飛行機の翼と同じ形状を持つ、プロペラの回転で生じるからである。その揚力が重力と釣り合ったときに、静止しているのである。

現在のヘリコプターは図 3-24 のように、推進力を、ローターのピッチを

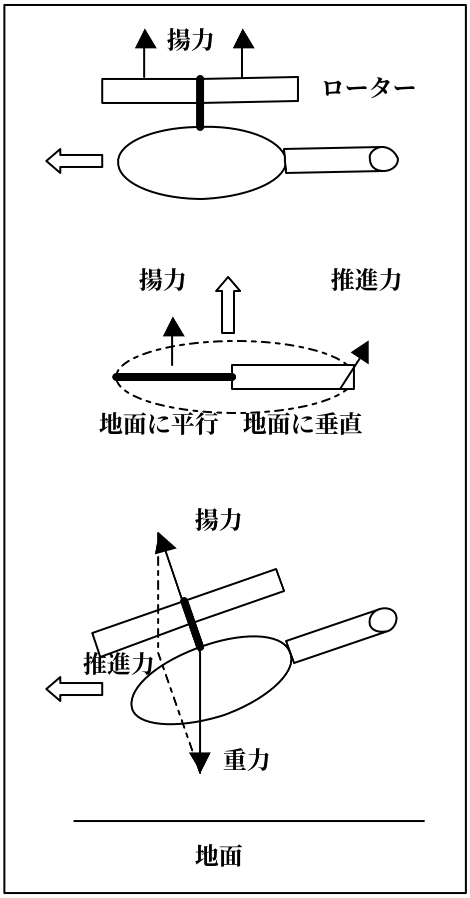


図 3-24　ヘリコプターの揚力

変えることにより獲得しており、従来の、気体を前方に傾けて、揚力と重力の合力から獲得する、ということはない。

従って、ローターのピッチは、ローター主軸で、揚力を得るときは飛行機の翼のはたらきをするように、推進力を得るときは、扇風機や船舶のスクリューと同じ働きをするように、進行方向左右の片側で、変えられている。

飛行船は、船体の気密室に封じられた、空気よりも軽いヘリウムなどの不活性ガスによる、浮力によって重力にうち勝って上昇し、プロペラで推進する。

熱気球は、気球に入れる熱せられた空気の浮力で上昇するが、推進は風まかせである。

空中を飛行する物体への、流体からの抵抗力は、動圧力と粘性抵抗、及び、渦抵抗である。

動圧力 P はよどみ点に作用し空気の密度をρ、物体の速さを v とすれば、

$$P = \frac{1}{2} r v^2 \qquad 3\text{-}56$$

である。

粘性抵抗は、ストークスの法則から、流速 U 流体中を運動する直径 d の球体が、密度ρ、粘性係数ηの流体から受ける大きさを D とすれば、

$$D = 3p hUd \qquad 3\text{-}57$$

であり、渦抵抗は、渦内が低圧力となるため、進行方向との圧力差が、抵抗力とされている。

（2）の、気体と液体の境界層を運動する場合、水面を浮かんで進む、船舶やアヒルなどで観察される。また、気体と固体の境界層を運動する場合、道路を走行する自動車や、斜面を滑るスキーヤーなどである。

これらの運動体に作用する力の関係を、図 3-25 に示すと、前者には、重力に対する液体からの浮力、推進力に対する液体からの抵抗力が関係している。後者では、重力に対する固体からの垂直抗力、エンジンの動力や重力の分力による推進力に対する、固体からの摩擦力が、抵抗力として作用する。また、空気から受ける、動圧力、粘性抵抗、渦抵抗も関係する。

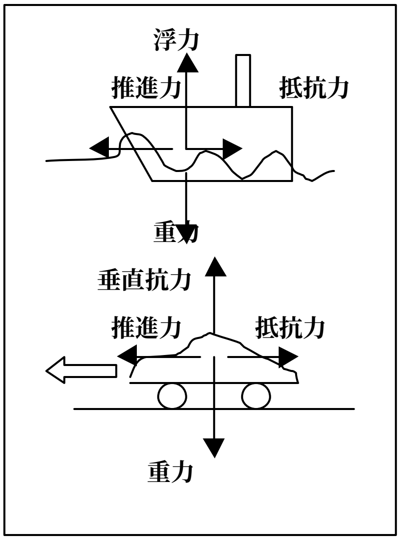


図 3-25 船や車に働く力

水面上を進むときの抵抗力には、流体からの動圧力、粘性抵抗、渦抵抗があるが、さらに、液体表面に作る波からの抵抗力がある。

波からの抵抗力という表現よりも、波を作るために、消費されるエネルギーの損失分が、抵抗力となっている、と言った方が適切である。このときの抵抗力を、造波抵抗という。この抵抗は船舶が航行するとき、各種の抵抗の中で最も大きくなるため、水中翼船などが開発されてきた。

水中翼船は、水中を翼が飛行機のように進み、揚力を生じ、船体が水面から浮き上がって進むため、造波抵抗や動圧力、粘性抵抗、渦抵抗から解放され、そのスピードが飛躍的に増大している。

一般の排水量が何万トンもある大型船では、水中翼船への移行が難しく、現在では、造波抵抗を小さくするため、船首に図 3-26 のような、瘤型の膨らみをつけている。

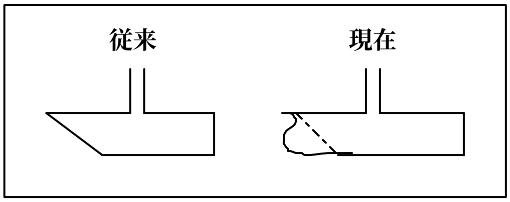


図 3-26 船舶の消波構造

船首の膨らみは、図 3-27 のように、従来の船首が作る、点線で示した水の表面波と、現在の、膨らみをつけた船首が作る、実線で示した表面波とが、ちょうど位相が 180° ずれるようになっており、両者が重なり合うことにより、互いにうち消し合うように作られている。

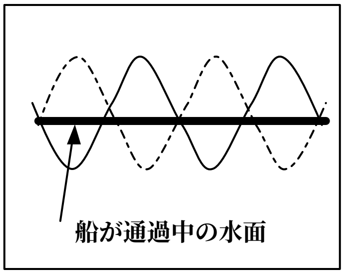


図 3-27 消波の理論

渦抵抗は、第三節第五項で示した、Karman 渦が発生するとき、水の速さが速くなるため、その渦内の圧力が減少し、運動する物体の前方部分の圧力よりも小さくなり、その圧力差が抵抗力となる。この大きさは、造波抵抗よりもずいぶん小さいが、速度が増すと加速度的に大きくなるため、船体構造は、渦ができないような、図 3-28 に示したような、流線型が採用されている。

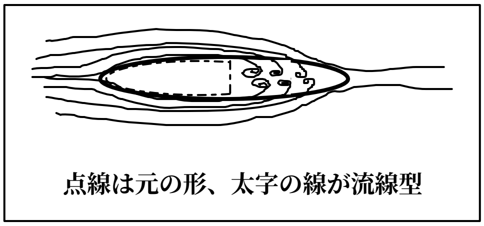


図 3-28 流線型

ところが、逆に、渦ができないと、渦が舵の役目もしているため、進行方向が不安定となり蛇行する原因となる。従って、舵のないフットボールのように、空中を飛行する場合では、選手が困るため、ボールに横回転を与えてそれを防いでいる。流体中を運動する物体の、経路を安定させるためには、渦を発生させるか、もしくは、流線型にする必要がある場合は、舵となる装置を取り付ける必要がある。

自動車のテール部分は、図 3-29 のように、流線型になっているが、高速で走る場合は、滑り摩擦力の低下と渦の発生がないためによる、走行が不安定となり、飛行機の翼を上下逆にしたものを取り付け、揚力と逆の力を発生させて、安定走行ができるようにしている。

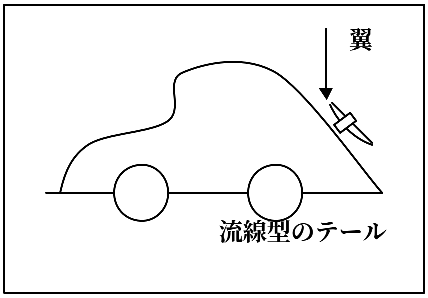


図 3-29 車の走行安定フイン

（3）の、水中で運動するものには、潜水艦や魚類がある。図 3-30 に物体に作用する力の関係を示した。

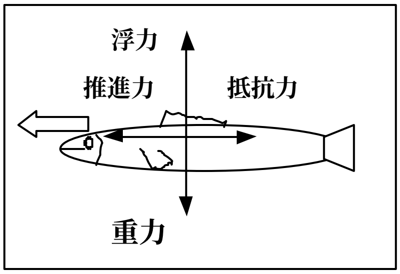


図 3-30 水中の力

　抵抗力については、水の密度が空気の数千倍もあり、そのために、動圧力や粘性抵抗、渦抵抗は空気中よりもはるかに大きい。そのため、魚や潜水艦ではよどみ点の面積が小さく、流線型をし、動圧力や渦抵抗が極力小さくなっている。しかも、造波抵抗が無視できるため、水中でも相当の速さで運動ができる。

第四章　熱現象の力学

第一節　固体の膨張

物体の温度が上昇すると膨張する。固体の膨張は長さの伸びと、体積の増加の二つがある。

線膨張

図 4-1 のように、温度 t における、長さが l の細い固体を熱して、温度を t'にすると、長さが l'となった。温度 1℃の上昇による、長さの伸びと、元の長さとの比をαとすれば、次の式となる。

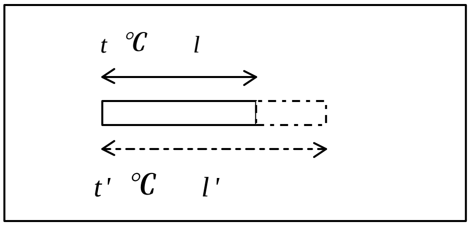


図 4-1 線膨張

$$a = \frac{\ell' - \ell}{\ell(t' - t')} \qquad 4\text{-}1$$

このαを線膨張率といい、金 0.1443(×10^{-4} 1/℃,40℃)、銀 0.1921、鋼鉄 0.1322、鉛 0.2924、鋼インバール(Ni,36％)0.009、クラウンガラス 0.0897(×10^{-4} 1/℃,0～100℃)、石英ガラス 0.0050、氷 0.51(−20～0℃)である。鋼インバールは精密機械の材料、石英ガラスは化学用器具に用いられている。

式 4-1 を整理すれば、

$$\ell' = \ell\{1 + a(t' - t)\} \qquad 4\text{-}2$$

となる。例えば、20℃のとき 25m のレールが、40℃では、

$$\ell' = 25\{1 + 0.1322 \times 10^{-4}(40 - 20)\} = 25.0066(m) \qquad 4\text{-}3$$

となり、約 0.7cm 伸びたことになる。従って、列車のレールの繋ぎ目では、真冬になると、すき間があくことになり、ゴトゴト音の原因となっている。

体膨張

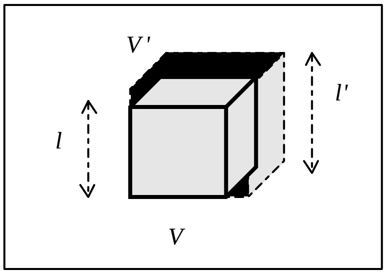


図 4-2 体膨張

図 4-2 のように、温度 t における体積が V の固体を、熱して温度 t' にしたら、体積が V'となった。温度 1℃の上昇による、体積の増加と、元の体積との比をβとすれば、

$$b = \frac{V' - V}{V(t' - t)} \qquad 4\text{-}4$$

となり、整理すると、

$$V' = V\{1 + b\,(t' - t)\} \qquad 4\text{-}5$$

となる。このβを体膨張率という。

固体は一辺が l の立方体であるとすれば、温度が t から t' に上昇したとき、辺の長さが l' に伸びたとして、4-2 式より、$\ell' = \ell\{1 + a\,(t' - t)\}$である。

従って、体積については、

$$\begin{aligned} V' &= \ell'^3 = \ell^3\{1 + a\,(t' - t)\}^3 = V\{1 + a\,(t' - t)\}^3 \\ &= V\left\{1 + 3a\,(t' - t) + 3a^{\,2}(t' - t)^2 + a^{\,3}(t' - t)^3\right\} \end{aligned} \qquad 4\text{-}6$$

となるが、最右辺の第 3 と第 4 項は、αが非常に小さいため無視できて、

$$V' = V\{1 + 3a\,(t' - t)\} \qquad 4\text{-}7$$

となり、4-5 式と比較して、

$$b = 3a \qquad 4\text{-}8$$

となる。

20℃で体積が 1000 cm^3 、線膨張率が 0.23×10^{-4}1/℃のアルミニウム容器がある。これを、100℃に熱すると、β＝3α＝0.69×10^{-4}1/℃であるから、容積の変化は、4-4 式から、

$$\begin{aligned} V' - V &= Vb\,(t' - t) \\ &= 1000 \times 0.69 \times 10^{-4}(100 - 20) = 5.52(cm^3) \end{aligned} \qquad 4\text{-}9$$

である。

第二節　液体の膨張

見かけの膨張

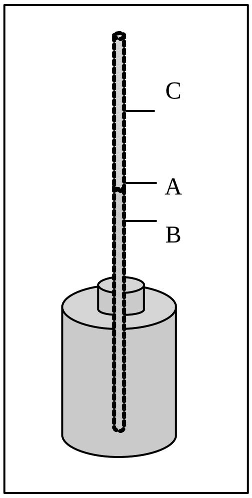


図 4-3 液体の膨張

図 4-3 のような、液体の入った容器に、ガラス管を挿入し、管内の A 点に液面があるようにしておく。ついで、熱湯の中に容器全体を浸せば、管内の液面が B 点まで下降し、しばらくすると、上昇を始め、A 点を通過した後、C 点に達する。

この現象は、容器の中に液体が入れられ、加熱されて、最初に容器が膨張するため、液面が下がり、次に液体が加熱されることで液面が上昇する。

ここで、管内における *AC* 部分の液体が膨張した量で、これを見かけの膨張といい、*AB* 部分は容器の膨張であるから、液体の真の膨張は *BC* 部分である。従って、「真の膨張＝見かけの膨張＋容器の膨張」が成り立つ。

熱する前の液体と容器の体積を V、上昇した温度を t、膨張後の液体と容器の体積を V_1、V_2、液体と容器の体膨張率を β_1、β_2 とすれば、

$$V_1 = V(1 + b_1 t) \qquad V_2 = V(1 + b_2 t) \qquad 4\text{-}10$$

であり、見かけの膨張した体積を V'とすれば、

$$V' = V_1 - V_2 = V(b_1 - b_2)t \qquad 4\text{-}11$$

となる。

温度が 1℃だけ上昇するときの、見かけの膨張は

$$\frac{V(b_1 - b_2)t}{t} = V(b_1 - b_2) \qquad 4\text{-}12$$

となり、これと元の体積 V の比を β'とすれば、

$$b' = \frac{V(b_1 - b_2)}{V} = b_1 - b_2 \qquad 4\text{-}13$$

となる。この、β'を見かけの膨張率という。

温度と密度

一般的に、物体の温度を上げると密度は小さくなる。質量 M、体積 V、密度ρの物体の温度を t だけ上昇させたら、体積 V'、密度ρ'となった。このときの体膨張率をβとすれば、

$$M = rV = r'V' \qquad \text{4-14}$$

であり、また、

$$V' = V(1 + bt) \qquad \text{4-15}$$

だから、両式から、

$$r' = \frac{r}{1 + bt} \qquad \text{4-16}$$

となる。

水の密度は特殊

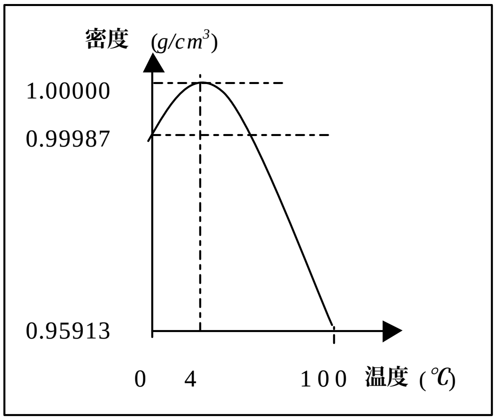


図 4-4 水の密度

図 4-4 は水の密度と温度の関係グラフである。0℃から 4℃までは密度が大きくなり、4℃で最大、4℃から 100℃までは減少する。このように他の物体とは異なる特性を有している。

一般に、4℃の水 1cm^3 の質量を 1g と定め、4℃の水の密度を 1g/cm^3 としている。

寒い地方の池においては、外気温の低下により、水は水面で冷却されて、密度が大きくなり、重くなって底の方へ沈み、鉛直方向の対流が生じる。一定の時間が経過すると、底から 4℃の水が溜まり、水面まで、すべての水が 4℃となる。次に、水面で 4℃よりも低い外気温により冷却され、0℃までは、密度が小さいから軽くなり、上から順番に 0℃となって溜まり、氷結する。従って、氷の下の水はすべて 4℃であるから魚は生存できる。

第三節　気体の膨張

ボイルの法則

自転車の空気入れや注射器の中に空気を密閉し、ピストンで圧力を加えると、体積が減少する。このとき、温度に変化がないとした場合、気体の体積を V、圧力を P とし、圧力を P'にしたときの体積を V'とすれば、実験的に測定された結果から、次の式が得られ、これをボイルの法則という。

$$PV = P'V' = const \qquad 4\text{-}17$$

シャルルの法則

気体の膨張は、固体・液体に比べ非常に大きく、膨張率はすべての気体について同じである。そして、ボイルの法則で示されているように、体積は圧力の変化により変化する。このため、実験的に膨張率を測定するときは、圧力を一定にしなければならない。

シャルルは、「圧力一定のとき、一定量の気体の体積は、温度が 1℃上昇するごとに 0℃における体積の 1/273 ずつ膨張する。」ことを観測した。これをシャルルの法則という。

いま、0℃、t℃における気体の体積を V_0、V とすればその法則は、

$$V = V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right) \qquad 4\text{-}18$$

と示せる。式 4-18 で t＝－273℃とすれば、V＝0 となるが、このときに、気体はすべて固体となっている。この極限の温度－273℃を絶対温度といい、単位の記号を K とする。従って、0^0K＝－273℃となるから、273^0K＝0℃という換算ができる。一般に、273＝T_0、273+t＝T とすれば、

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} = const \qquad 4\text{-}19$$

となる。これは絶対温度と体積の関係式である。

ボイル・シャルルの法則

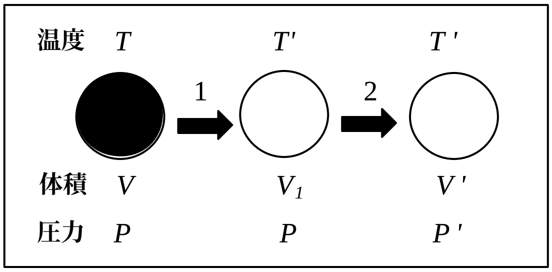


図 4-5 気体の膨張

図 4-5 のように、1 の変化は、圧力 P を変えずに、絶対温度を T から T' にしたとき、体積が V から V_1 へ変化した場合で、シャルルの法則から、

$$\frac{V}{T}=\frac{V_1}{T'} \qquad 4\text{-}20$$

となる。

次に、2 の変化は、絶対温度 T' を変えずに、圧力を P から P' にしたとき、体積が V_1 から V' へ変化した場合で、ボイルの法則から、

$$PV_1=P'V' \qquad 4\text{-}21$$

となる。

ここで、上の二式から V_1 を消去して、

$$\frac{PV}{T}=\frac{P'V'}{T'}=const \qquad 4\text{-}22$$

が得られる。これをボイル・シャルルの法則という。この法則を言葉で示せば、「一定量の気体の体積は、圧力に反比例し、絶対温度に比例する。」となる。

密度、圧力、絶対温度の関係

図 4-5 の場合、どの変化が行われても、気体の質量 M は変わらないから、最初の密度を ρ、最後の密度を ρ' とすれば、ρ $=M/V$、ρ'$=M/V'$ であるので、この関係を 4-22 式に代入すれば、

$$\frac{P}{rT}=\frac{P'}{r'T'}=const \qquad 4\text{-}23$$

となる。この式から「気体の密度は、圧力に比例し、絶対温度に反比例する。」事が解る。

第四節　熱量・熱エネルギー・比熱

熱量

高温物体を低温物体に接触させると、熱が温度の低い方へ伝搬する。この場合の熱とは、物体を構成する粒子運動の熱エネルギーであり、その大きさを熱量という。熱量の単位は、純水 1*g* を 14.5℃から 15.5℃まで 1℃高める熱量を 1*cal* としている。

流体の熱現象における粒子運動の熱エネルギーは、アボガドロ数程度の粒子数の運動で、個々の粒子の運動エネルギーを平均した値である。

固体を構成する粒子は、互いに作用し合う粒子間力により、結晶構造を構成するため、飛び回ることなく、自身の狭い領域で熱振動をしている。従って、固体の熱エネルギーは、熱振動をする粒子の振動エネルギーを平均した値である。

仕事と熱エネルギー

ジュールは、図 4-6 のような装置で、仕事と熱エネルギーの関係を実験し、熱の仕事当量を示した。これは、ジュールの実験といい、水槽の中に入れられた羽根車を、紐と滑車を通じてつり下げられた錘で回転させた。錘を落下させたとき、「錘が、位置エネルギーに相当する仕事を水に与えた」と考えて、水温の上昇と錘の落下距離を測定し、仕事 W と熱エネルギーQ の関係を、

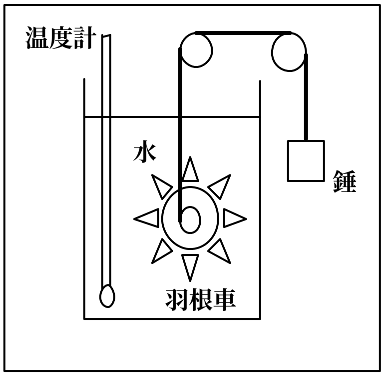


図 4-6 ジュールの実験

$$W = JQ \qquad 4\text{-}24$$

と示した。この J を熱の仕事当量という。現在では、温度の指定がない場合の値として、J＝4.18605 J/cal を用いている。

比熱と熱容量

質量 m の物体について、温度 t を t'まで上昇させるのに必要な熱量を H とすれば、

$$H = cm(t' - t) \qquad 4\text{-}25$$

となる。ここで、c は物体固有の定数で比熱という。水 1g を 1℃上昇させるのに必要な熱量は 1cal であるから、水の比熱は

$$c = \frac{H}{m(t' - t)} = \frac{1cal}{1g \cdot 1^0 c} = 1cal/g^0 c \qquad 4\text{-}26$$

である。また、鉄は 0.11cal 必要だから、鉄の比熱は 0.11cal/g℃である。

比熱が大きいほど、熱するのに多くの熱が必要であり、熱しにくさを表している。一度熱せられた物体は、他の物体に熱エネルギーを与えなければ、すなわち、熱を放出しないと、温度が低くならないので、冷めにくさを表している。

ここで、4-25 式の mc を熱容量として、物体の熱保有の大きさを表すことにする。従って、質量が大きく、比熱も大きい物体ほど、熱しにくく冷めにくいといえる。

比熱の測定

比熱は図 4-7 のような、混合法が用いられる。比熱が c'、質量 m'の銅製容器の中に、質量 m の水が入れられており、容器と水の温度が t' であるとする。いま、比熱 c、質量 M の金属球を温度 t まで熱し、水の中に入れ、よくかき混ぜると、水は最高温度 T まで上昇した。

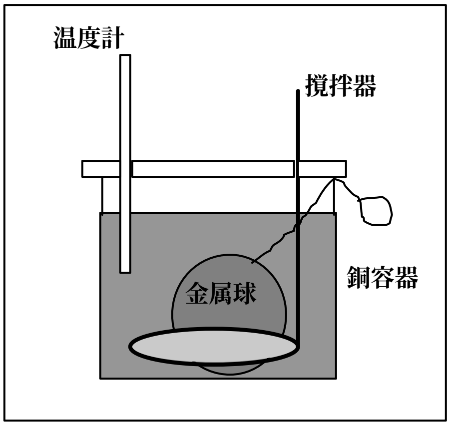


図 4-7 比熱の測定

ここで、金属球が失う熱量を Q、水が得る熱量を q、容器が得る熱量

を q'とすれば、$Q＝q＋q'$ であり、4-25 式から、

$$cM(t-T)=m(T-t')+c'm'(T-t') \qquad 4\text{-}27$$

となり、整理して、

$$c=\frac{(m+c'm')(T-t')}{M(t-T)} \qquad 4\text{-}28$$

となる。この式で、金属球の比熱 c を計算する。また、式中の $c'm'$ を容器の水当量という。

20℃における比熱の値は、単位を cal/g℃として、白金 0.032、銀 0.056、銅 0.092、鉄 0.107、アルミニウム 0.211、氷 0.487（0℃)、エチルアルコール 0.57、水 1.000 である。

水の比熱はあらゆる物質の中で一番大きい。動植物の体内に含まれる水の割合が、重要な意味を持つのは、前述したように、一度暖められると、なかなか冷めないので、体温の維持に最適であるからである。また、冷却する場合にも水は効率よく働くし、水辺の気温が比較的平穏なのも、水の特性からである。

ジュールの実験と比熱

図 4-6 の装置で、錘の質量を M、水の質量を m、錘が高さ h だけ下降したとき、水の温度が t から t'へ上昇したとすれば、錘がおこなった仕事 W は、

$$W=Mgh \qquad 4\text{-}29$$

であり、水が得た熱量 Q は、

$$Q=cm(t'-t) \qquad 4\text{-}30$$

であるから、4-24 式より、

$$Mgh=cm(t'-t) \qquad 4\text{-}31$$

となり、整理して、

$$c=\frac{Mgh}{m(t'-t)} \qquad 4\text{-}32$$

が得られる。この式は定性的で、比熱の測定には誤差が多く使われない。

第五節　熱の伝搬

熱伝導

熱は、自然界における、どんな物体の状況であっても伝わっていく。ある物理量が伝わることを伝搬するという。

図 4-8 のように、距離 l だけ離れた二点 A、B の温度が t_a、t_b であるとき、この二点を結ぶ方向に直角な、単位面積を単位時間に伝搬する熱量を Q_0 とすれば、

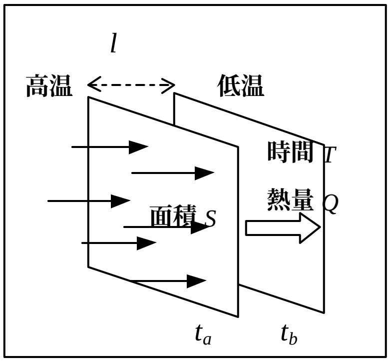


図 4-8 熱伝導

$$Q_0 = k\frac{t_a - t_b}{\ell} \qquad 4\text{-}33$$

である。従って、時間 T の間に面積 S を伝搬する熱量を Q とすれば、

$$Q = \frac{kST(t_a - t_b)}{\ell} \qquad 4\text{-}34$$

となる。ここで、$(t_a - t_b)/\ell$ を温度勾配といい、k を熱伝導率という。k の値が大きいほど熱をよく伝搬させる。k の単位は、上式から、

$$k = \frac{\ell Q}{ST(t_a - t_b)} \qquad 4\text{-}35$$

であるから、その単位は *cal/(cm sec℃)* となる。

この熱伝導率は、厚さ 1*cm* の板の両側に 1℃の温度差があるとき、その板の面 1cm^2 を、1 秒間に伝搬する熱量で表せる。この値の 20℃における主なものは、銀 0.998、金 0.71、アルミニウム 0.487、鋼鉄 0.116、大理石 0.0056、ガラス 0.0017、水 0.0014、樫の木 0.0005、桐の木 0.0002、毛布 0.0001、などである。

空調の分野では、この熱伝導率が異なる建築部材を、どこに使用するかが重要な要素となっている。

熱対流

熱が、物質の運動に従って伝搬することを熱対流という。流体では、一般的な現象であり、固体では見られない。

液体の場合、温度の高い部分は、まわりよりも密度が小さくなり、浮力が生じ上方に上がる。逆に、低い部分は密度が大きく下方へ下降する。これらが連続的に起こり、液体内で大きな循環が生じる。しばらくして、液体のすべてで、温度が等しくなると、対流は消滅し構成粒子の大きな移動はなくなる。

気体の場合もほぼ同様であるが、大気については、マクロな気団の対流だけではなく、地球回転による大気の流れが生じ、ジェット気流や、偏西風、台風のような現象も発生する。

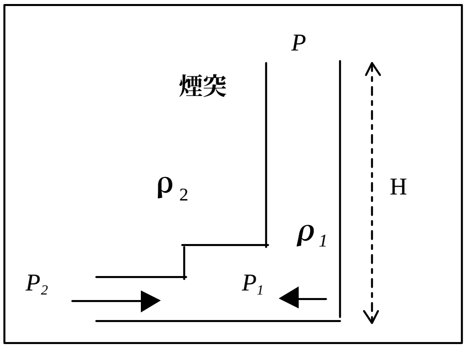


図 4-9 煙突の機能

物を燃焼させる場合、燃焼に必要な酸素の供給をよくするために、煙突が使われている。この場合、何が重要なことか考える。

図 4-9 のように、高さ H、煙突の頂点における大気圧 P、煙突内・外の空気密度を ρ_1、ρ_2、燃焼室内・外の圧力を P_1、P_2、とすれば、

$$P_1 = P + r_1 H \qquad P_2 = P + r_2 H \qquad 4\text{-}36$$

である。ここで、燃焼室内の空気は高温であるから、$\rho_1 < \rho_2$、$P_1 < P_2$ である。

その差 $P_2 - P_1$、は、

$$P_2 - P_1 = (r_2 - r_1)H \qquad 4\text{-}37$$

となる。

従って、圧力差が大きいほど、外からの空気が多量に煙突内に吹き込むから、充分な酸素が供給され、よく燃焼する。この圧力差は煙突の高さ H に比例するので、煙突が高いほどよく燃焼することになる。

熱放射

太陽やストーブから暖をとっているが、熱源からのエネルギーを直接受けており、途中の気体の有無に関しない。これは、電磁波の一種である赤外線の効果である。しかし、途中の気体による熱エネルギー減衰によって、暖かさが減ずることがある。このような熱の伝搬を熱放射という。

図 4-10 のように、半径 r の球面に対し、その中心に置かれた熱源から熱エネルギーが放射されている。その熱エネルギーが、1 秒間に E だけ放射されているとし、球面 $1cm^2$ を 1 秒間に伝搬する熱エネルギーを E'とすれば、球の表面積が $4\pi r^2$だから、

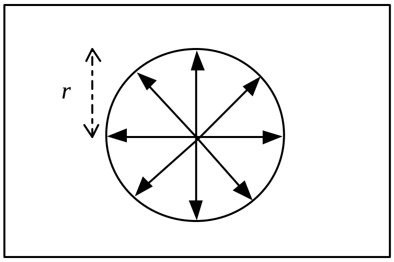


図 4-10 熱放射

$$E' = \frac{E}{4pr^2} \qquad 4\text{-}38$$

となる。この式から、熱放射による熱エネルギーは、熱源からの距離の二乗に反比例することが解る。

太陽から放射される熱エネルギーは、毎分当たり、太陽光線に直角な面 $1cm^2$ につき、$2cal$ であることが測定されており、これを太陽定数という。従って、面積 S の物体表面が、時間 T の間に受ける熱エネルギーE は、

$$E = \frac{TS}{30} \qquad 4\text{-}39$$

となる。

普通乗用車の天井が、密度 7.86、比熱 0.107 の鉄製で、面積 $1m^2$、厚さ 0.2 cm であるとき、1 時間の間にどれだけ温度が上がるか計算する。
式 4-30 と 4-39 から計算すれば、次のようになる。

$$cm(t'-t) = \frac{TS}{30} \qquad 4\text{-}40$$

$$t'-t = \frac{TS}{30cm} = \frac{3600 \times 1000000}{30 \times 200000 \times 7.86 \times 0.107} = 71°c \qquad 4\text{-}41$$

冷却の法則

高温物体が、熱エネルギーの伝導・対流・放射により、冷えて行くが、外気温との差が数十度の範囲であれば、「物体の単位面積から、単位時間に失われる熱エネルギーは、その表面の温度と、外気温との差とに比例する」ことをニュートンが示した。これを、ニュートンの冷却の法則という。

いま、表面温度 t、外気温 t'、表面積 S、冷却時間 T、失われる熱エネルギーQ とすれば、比例定数を k として、冷却の法則を等式で示せば、

$$Q = kS(t - t')T \qquad 4\text{-}42$$

となる。ここで、定数 k は、表面の状態や物体の周辺す環境の違いにより異なる。

熱の伝搬を遮断する

物体の温度は常に変化しているが、その変化を極力なくして、一定の温度を保ちたい場合がある。例えば、冷蔵庫は 0℃に近い一定な温度に保つよう、外気からの熱エネルギー流入による温度上昇分を、電気的エネルギーを用いて、取り除いている。また、ポットは熱くした温水の温度を保つため、伝導・対流・放射による、熱エネルギー放出を断つ構造になっている。

図 4-11 は温水用ポットである。ポット内の湯を冷まさないように、内部を真空にしたガラス容器の両面を銀メッキし、容器とポットの間には、コルクを張り詰めてある。

銀メッキ面で熱放射を防ぎ、熱伝導率が最も小さいコルクで熱伝導を防ぎ、真空で熱対流を防ぐようになっている。

冷却用のポットも基本的な構造は、ほぼ同様であるが、その用途に適した材料で若干の違いがある。

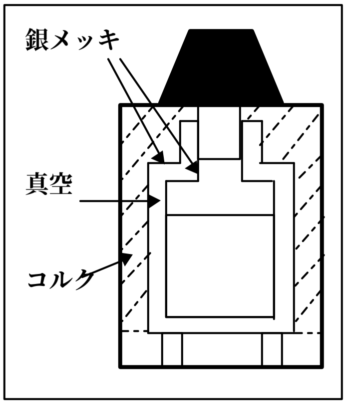


図 4-11 温水ポット

第六節　物質の状態変化

固体の融解

物質はある状態のとき、内部を構成する粒子の運動状態によって、固体、液体、気体のいずれかである。固体は、粒子間の引力と斥力の作用により、結晶構造にはめ込まれ、他の粒子との位置が交換できなくなっている。ところが、粒子の熱振動を、より励起する外力が作用すると、結晶構造を維持する粒子間力のバランスが壊れ、ブロック状態のまま、あるいは個々の粒子単独のまま、固体の領域から離脱させられてしまう。このように、固体から、構成粒子が離脱する現象を融解という。このとき、励起させる外力は仕事をするから、融解の原因は外部からの仕事、すなわち、熱エネルギーが与えられることにある。この熱エネルギーを融解熱という。

融解熱の大きさは、一般に、0℃における氷 1*g* を融解して、水 1*g* を得るための熱量は 80*cal* であることから、氷の融解熱を 80 *cal/g* としている。

また、融解の始まるときの温度を融解点（融点ともいう）という。水の融解点は 100℃である。主な物質の融解点と融解熱は、エチルアルコール -117℃, 24 *cal/g*、水銀-38.87℃, 2.8*cal/g*、ナトリウム 97.7℃, 27 *cal/g*、鉛 327.3℃, 5.5 *cal/g*、アルミニウム 660℃, 95 *cal/g*、金 1063℃, 15 *cal/g*、鉄 1535℃, 64 *cal/g*、クロム 1800℃, 76 *cal/g*、である。

液体の蒸発と気体

融解した粒子は、さらに、外部からの作用を受けると、熱エネルギーを吸収して温度が上昇し、自身のエネルギーを増大していく。この状態が液体であり、エネルギーが増大した粒子ほど密度が小さくなって軽くなるから、液体上方へ対流する。

液体表面近くに集まってきた、エネルギーの大きな粒子は、さらに、外部からの作用により、その熱エネルギーを増大させ、個々の粒子と互いに

衝突しながら、自由に液体中を飛び回っている。そのような粒子は、液体表面の近傍に存在する気体との衝突に、最初ははじき飛ばされて液体内部に戻るが、そのうち、自身の熱エネルギーの増加に伴い、固体粒子との衝突に、ついに打ち勝つようになり、液体表面から飛び出てしまう。この現象を蒸発という。また、このときの、蒸発するために与えられた熱エネルギーを蒸発熱（気化熱ということもある）という。

蒸発熱は、一般に、1 気圧（1013*hPa*）のもとで、温度を変えることなく、液体 1*g* を蒸発させるのに必要な熱量を蒸発熱という。水の場合は、100℃で蒸発するとき、539*cal* の熱量が必要であるため、水の蒸発熱は、
539 *cal/g* としている。

蒸発は液体表面で起こり始めるが、液体内部でも蒸発現象が生ずるときがやってくる。その現象を沸騰といい、そのときの温度を沸騰点（沸点ともいう）という。

主な物質の沸騰点と蒸発熱は、0℃の水 596*cal*、100℃の水 539*cal*、アンモニア-33.4℃,325*cal*、エチルアルコール 78.5℃,205*cal*、水銀 356.6℃,68*cal*、である。

気体となった粒子群は、外部からの作用を受け続けると、気体としての温度が上昇し、体積が増大し、圧力は小さくなる。ところが、体積が大きくなることにより、密度が減少し、気体上部へ運動し対流する。

物質の状態変化と仕事

このように、物質の構成粒子が外部からの作用、すなわち、仕事をされると、その状態が、固体、液体、気体へと変化していく。

また、この逆に、物質が持つ熱エネルギーを他に与えれば、気体、液体、固体の方向へ状態が変化する。このとき、気体が液体に変化することを凝集（液化ともいう）といい、液体が固体に変化することを凝固という。

ここで、凝集熱は蒸発熱と同じであり、凝固熱は融解熱と同じであることになる。

液化

気体の体積が V、絶対温度 T、圧力 P とすれば、ボイル・シャルルの法則から、気体のモル数を n、気体定数を R として、

$$PV = nRT \qquad 4\text{-}43$$

となる。

ここで、後述するが、「気体定数＝ボルツマン定数×アボガドロ数」であり、記号では $R = kN_0$ と示し、$R = 8.31 \times 10^7\ erg/^0K\ mol$ である。

式 4-43 に従い、気体の絶対温度を一定にして、圧縮していくときのグラフを模式的に、図 4-12 に示した。また、絶対温度を変えて、同様の実験をした結果が示されている。

空気の場合、圧力と体積が、反比例の関係にあるから、双曲線状となる。ところが、二酸化炭素の場合は、ある絶対温度までは、4-43 式に従うが、それよりも絶対温度が低いとき、ある圧力以上になると、PQR 線のように、圧縮を続けても圧力が不変となる区間 QR があり、さらに、圧縮をすると Q 点から P へ向かう。このとき、R 点で液化が始まる RQ 間では、気体がすべて液体に変化するまで、エネルギーが消費されるので圧力が変化しない。図中の点線内部は、液化がおこなわれ、気体と液体が共存する範囲を示す。また、★の点は、液化されるかどうかの境界を示し、臨界点という。

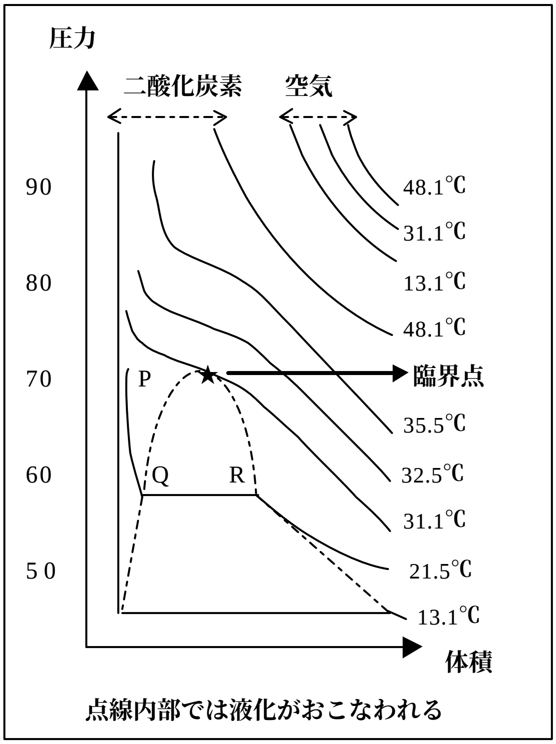


図 4-12 気体の液化曲線

臨界点

気体が液体になることを液化するという。前項で、臨界点における温度を臨界温度といい、そのとき、液化に必要な圧力を臨界圧力という。二酸化炭素では、臨界温度は 31.0℃、臨界圧力は 72.8 気圧である。この臨界温度より高い温度で、いくら圧力を高くしても液化しない。

近年、液体酸素、液体窒素、液体ヘリウムなどが実際に用いられているが、それらの臨界点は、酸素（-118.4℃,50.1 気圧）、窒素（-147.1℃,33.5 気圧）、ヘリウム（-267.9℃,2.26 気圧）である。

圧力 *P*、体積 *V*、絶対温度 *T* の相互変化

図 4-13 に、気体の状態に関するグラフを示した。気体の変化について、温度を一定にしたとき、圧力と体積の変化である等温変化（または断熱変化）と、体積を一定にしたとき、圧力と温度の変化である等積変化について考えてみる。

P から Q へは、温度 T_1 一定の等温変化、Q から R へは、体積 V_2 一定の等積変化、R から S へは、温度 T_2 一定の等温変化、S から P へは、体積 V_1 一定の等積変化である。

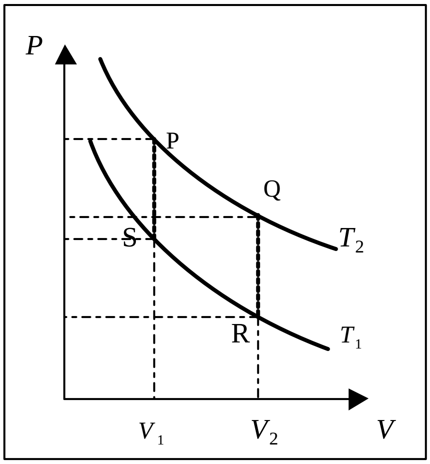


図 4-13 カルノーサイクル

T_1 ＜T_2 の場合、気体に対する、外部との熱エネルギー収受は、等温変化ではゼロ、等積変化では Q→R で放出、S→P では吸収である。また、外部との仕事のやりとりでは、等温変化ではゼロだが、等積変化では Q→R で仕事をする、S→P では仕事をされる。

このように、P→Q→R→S→P、のような一回りの循環をカルノーサイクルといい、動力源などのエネルギーを考える方法の一つである。

第七節　気体の分子運動

分子運動と圧力

質量 m の分子が、一辺の長さが a の立方体内で、速さ v で壁に垂直に運動している。分子が 1 往復する時間 t は、

$$t=\frac{2a}{v} \tag{4-44}$$

であり、1 秒間に壁に衝突する回数 n は、

$$n=\frac{1}{t}=\frac{v}{2a} \tag{4-45}$$

となる。

壁に衝突することによる運動量の変化は、$mv\text{-}(\text{-}mv)\text{=}2mv$ であり、これが壁に対する力積の大きさであるから、次の式となる。

$$\text{力積の大きさ}=\frac{v}{2a}2ma=\frac{mv^2}{a} \tag{4-46}$$

N 個の粒子が容器に入っているとすれば、$N/3$ 個が一つの壁に衝突するから、全圧力 P は、

$$P=\frac{N}{3}\frac{mv^2}{a} \tag{4-47}$$

であるが、これを面積 a^2 で割れば圧力 p となり、

$$p=\frac{Nmv^2}{3a^3} \tag{4-48}$$

である。ここで、体積を v とすると、

$$pV=\frac{Nmv^2}{3} \tag{4-49}$$

となる。分子運動の平均エネルギーを E とすれば、$E=1/2\,mv^2$ より、

$$pV=\frac{2NE}{3} \tag{4-50}$$

となる。この右辺は、温度が一定な場合、一定であるから、この式はボイルの法則を示している。

分子の平均の速さ

式 4-49 の Nm は、気体の質量 M を示し、$Nm=M$ とすれば、

$$p = \frac{Mv^2}{3V} \qquad 4\text{-}51$$

となり、また、気体の密度をρとすれば、ρ$=Nm/V$ より、

$$p = \frac{1}{3} r v^2 \qquad 4\text{-}52$$

である。整理して、

$$v = \sqrt{\frac{3p}{r}} \qquad 4\text{-}53$$

が得られる。

水素は 0℃、1 気圧で密度ρは 0.0899×10^{-3}g/cm^3 だから

$$v = \sqrt{\frac{3\times1.013\times10^6}{0.0000899}} = 1.84\times10^5 (cm/\sec) = 1840 (m/\sec) \qquad 4\text{-}54$$

となる。酸素は密度ρ=0.00143 g/cm^3 だから、460 m/sec である。

ボルツマン定数と気体定数

式 4-43 と 4-50 から、PV を消去し、n＝1 とすれば、

$$E = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T \qquad 4\text{-}55$$

となる。ここで、$R/N=k$ とおけば、（この k をボルツマン定数、R を気体定数という。）次式となる。

$$E = \frac{3}{2}kT \qquad 4\text{-}56$$

第八節　熱力学の第一法則と理想気体

熱力学の第一法則と第一種の永久機関

ジュールの実験において、錘の落下によって与えられた、力学的エネルギーWによる水温の上昇に加えて、他の熱源から熱量 Q が与えられ、水温の上昇に寄与したとすれば、水の質量 M、比熱 c、温度上昇 t_1 から t_2 のとき、次の式となる。

$$JQ + W = JMc(t_1 - t_2) \qquad 4\text{-}57$$

この式は、力学的エネルギーに熱エネルギーを含めて、エネルギー保存則が成立することを示す。このことを熱力学の第一法則という。個々の物体の集合体における、全体としてのエネルギーを考えるために、物体の集団、すなわち、系を考える。系の内部構造が不明であっても、その時々の状態に応じたエネルギーが存在するとし、そのエネルギーを内部エネルギーといい、記号で U を用いる。

4-57 式の場合、右辺の温度上昇の前後で内部エネルギーU_1、U_2、とすれば、すべての項をエネルギー単位で示し、

$$U_1 - U_2 = Q + W \qquad 4\text{-}58$$

となる。ここで、系に加えられるものを正、出るものを負とする。

系の量は、内部エネルギーの他に圧力、絶対温度、体積があり、これらはその瞬間の状態で定まり、どのような経路を経て、その状態になっているかという事は考えなくてもよく、このような量を状態量という。

自動車のエンジンは、シリンダー内のピストンが、同じ状態を繰り返して動力を作っているが、その一サイクルが終わったとき、系の状態は同じであるから、$U_1 = U_2$ となるから、

$$-W = Q \qquad 4\text{-}59$$

である。これは、熱エネルギーの増加なしに仕事は増加しないことを示し、これに反するエンジンは、実際にはあり得ないが、空想的に第一種の永久機関という。

理想気体の状態方程式

図 4-14 のように、絶対温度 T_0、体積 V_0、圧力 P_0、の気体が、絶対温度 T_1、体積 V_1、圧力 P_1、に変化したとき、

$$\frac{P_0V_0}{T_0}=\frac{P_1V_1}{T_1}=const \qquad 4\text{-}60$$

が成立し、これは、ボイル・シャルルの法則である。

この法則に従う気体を理想気体という。

理想気体には、分子同士が衝突しないし、器壁とは完全弾性衝突をするなどの条件がある。

一般的には、気体定数を R として、次の式で表現し、理想気体の状態方程式という。

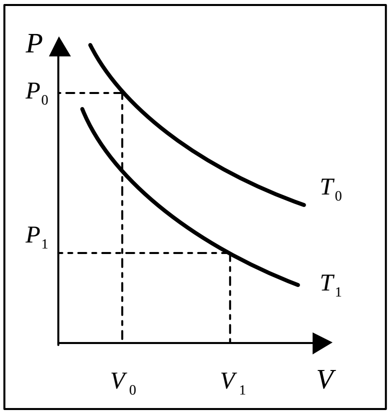


図 4-14 理想気体

$$PV=RT \qquad 4\text{-}61$$

実在気体の液化

図 4-15 は二酸化炭素を圧縮して、液化する場合の $P-V$ 曲線である。G_1 の領域は高温での圧縮、G_2 は臨界温度以下の低温部で圧縮、L は液体、L+G は気体と液体の共存である。また、E は臨界温度、T_E は臨界温度、P_E は臨界圧力、V_E は臨界体積である。L+G の共存領域では、A で液化が始まり、B で終わる。

E の臨界点を示す臨界状態では、液体と気体の区別がなく、液体の表面が見られない。液化と臨界点のデータは第六節を参照されたい。

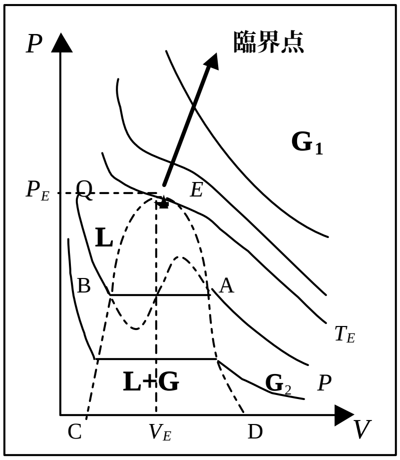


図 4-15 実在気体

Van der Waals（ファン・デル・ワールス）の状態方程式

ファン・デル・ワールスは、前項の液化を示す曲線 PABQ を導き、

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \qquad \text{4-62}$$

を得た。この式を変形すれば、

$$pV^3-(pb+RT)V^2+aV-ab=0 \qquad \text{4-63}$$

となる。

この式は、温度が T のとき、a と b は気体分子特有の値で一定値、R は気体定数だから、圧力 p と体積 V の関数である。この曲線は、体積 V に関する三次方程式で、図 4-15 の PABQ である。ただし、AB 間は点線部分である。

臨界点において、他の法則などから、

$$p_E=\frac{a}{27b^2} \qquad T_E=\frac{8a}{27Rb} \qquad V_E=3b \qquad \text{4-64}$$

が求められており、これらから a、b を消去して、

$$\frac{RT_c}{p_cV_c}=2.67 \qquad \text{4-65}$$

となる。実測値は、He が 3.34、H_2 が 3.31、である。

理想気体の状態方程式は、a と b が無視できる大きさの V を考えると得られる。

第五章　波と音の力学

第一節　波動現象の基本的物理量

波の方程式

水の上を伝わる波や音、光などを波動という。波動を伝える物質を媒質というが、個体、流体を構成する粒子でもある。波動現象内の媒質は単振動をおこなっている、単振動のエネルギーが伝わることを波動と言ってもよい。静止していた媒質に、波動が到達すると、波動の持つエネルギーが媒質に与えられ、媒質を単振動させる。このような現象が、次々と四方八方へ伝わっていく。

波動を表現するために、第一章第八節で記述したように、円運動をする物体の、正射影における影の運動を考える。

図 1-38 のように、半径 r の円周上を回転する物体の回転角度がθのとき、スクリーン上の影の位置 x は、中心からの距離が x であれば、

$$x = r\sin a \qquad 5\text{-}1$$

となる。ここで、円運動で用いる用語を波として用いる場合θを位相、r を振幅、x を変位という。そして角速度ω＝θ/t からθ＝ωt を代入して、

$$x = r\sin wt \qquad 5\text{-}2$$

となる。ここで、t は中心から変位 x だけ動く時間である。また、円運動の周期 T は T＝2π/ωからω＝2π/T を代入し、

$$x = r\sin\frac{2pt}{T} \qquad 5\text{-}3$$

となる。ここで、1/T＝f とおき、f を振動数という。ここで、円運動の半径 r の代わりに、r＝A とおきかえ、振幅を A とすれば

$$x = A\sin 2pft \qquad 5\text{-}4$$

となる。この式を波の方程式という。

波の方程式の一般型

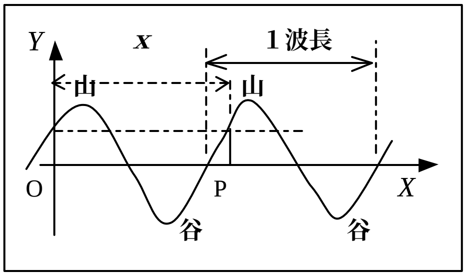


図 5-1 波の方程式

図 5-1 のように、波が X 軸の正方向に進んでいるとき、振幅を A、振動数を f、変位を y、速さを v とする。

いま、原点 O における、時刻 t における媒質の変位が y とすると、

$$y = A\sin 2pft \qquad \text{5-5}$$

となる。

次に、原点 OX 軸上の、原点から x の距離にある P 点には、x/v の時間だけ遅れて到着する。従って、時刻 t における P 点の変位 y は、x/v 時間前の時刻、すなわち、原点 O の変位に等しい。よって、

$$y = A\sin 2pf\left(t - \frac{x}{v}\right) \qquad \text{5-6}$$

となる。これが一般的な波の方程式である。

波の物理量

図 5-1 において、波の最高点を山、最低点を谷という。隣り合う山の距離を波長といい、記号でλを用い、山から山まで通過する時間を 1 周期といい、記号で T を用いる。

波の伝わる速さを v とすれば、

$$v = \frac{l}{T} \qquad \text{5-7}$$

となる。単位時間に通過する山の数を振動数といい、記号で f を用いる。また、単位時間に波長が何個分通過したかと言ってもよい。従って

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{5-8}$$

となり、周期は振動数の逆数である。

式 5-7,5-8 から、

$$v = fl \qquad 5\text{-}9$$

となる。

波の方程式の実用型

式 5-6 に式 5-8,5-9 を代入すれば、

$$y = A\sin 2p\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) \qquad 5\text{-}10$$

となり、実用的な波の方程式を示す。他に、f＝1/T、v＝fλの式を用いれば、振動数と波の速さも求められる。

この式において、x＝0 とすれば、

$$y = A\sin\frac{2pt}{T} \qquad 5\text{-}11$$

となり、y と t の関係を示し、ある地点を通過する波における、媒質振動の波形を時系列で表す。

また、t＝0 とすれば、

$$y = A\sin 2p\frac{x}{l} \qquad 5\text{-}12$$

となり、y と x の関係を示し、ある瞬間における波の波形グラフを示す。

実用的な波の方程式で計算すれば、周期 4 秒で、振幅 2m、波長 10m の波が、原点から 10m 離れた地点へ到達する時間が 11 秒であったとき、その変位 y は、

$$y = 2\sin 2p\left(\frac{11}{4} - \frac{10}{4}\right) = 2\sin\frac{p}{2} = 2(m) \qquad 5\text{-}13$$

である。

上の波で、時間 t＝0 とすれば、

$$y = 2\sin 2p\left(\frac{x}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{p}{2}x\right) \qquad 5\text{-}14$$

となり、y と x に関する sin 曲線を示す。

第二節　波の種類

横波と縦波

　水面波や、弦を伝わる波、地震の S 波のように、波の進行方向に対して、媒質各部の振動方向が垂直な波を横波という。
　音波や地震の P 波、固体中を伝わる圧縮波などは、波の進行方向に対して、媒質各部の振動方向が一致している波を縦波という。
　波は媒質の種類や原因となる力の違いにより、種々の呼び方がある。媒質の弾性力により伝わる波を弾性波、ピンと張られた弦を伝わる横波を張力波、重力により起きる波を重力波、さざ波のような表面張力などである。

波の速さと媒質

　弾性波が伝わる媒質では、媒質の密度と弾性率が大きいほど、動きにくく、元の状態に速く戻るから、密度が小さいほど、弾性率が大きいほど、波は速くなる。従って、密度や弾性率の異なる境界層では、速く伝わる媒質の方へ、すなわち、密度が小さく弾性率が大きい方へ曲がることになる。
　次に、物体内を伝わる種々の波の速さを示した。

k　体積弾性率
n　ずれの弾性率
ρ　密度　**E**　ヤング率
T　弦の張力　**S**　線密度

　断面の大きな固体の縦波　$v=\sqrt{\dfrac{3k+4n}{3r}}$

　断面の大きな固体の横波　$v=\sqrt{n/r}$

　棒状固体の縦波　$v=\sqrt{E/r}$　　弦の横波　$v=\sqrt{T/S}$

流体では、ずれの弾性がないため、横波は発生しないし伝わらない。

　流体を伝わる縦波　$v=\sqrt{k/r}$

水面波

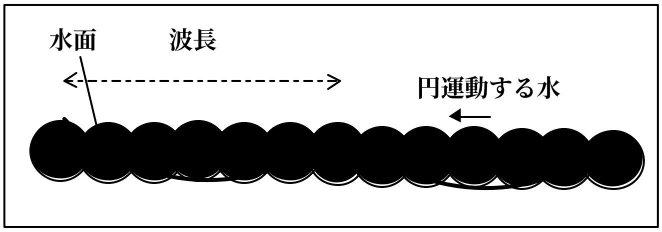


図 5-2　水面波

図 5-2 は水面波を示すが、水面部分の水が、同方向に円運動していると考えられており、そのときの円に対するトロコイド曲線が水面を形成している。

表面波の速さ v、密度ρ、表面張力σ、波長λ、重力加速度g とすれば、

$$v=\sqrt{\frac{gl}{2p}+\frac{2ps}{rl}} \qquad 5\text{-}15$$

である。

波長が大きく、第 1 項が寄与する場合、海で見られる水面波で重力波といい、

$$v=\sqrt{\frac{gl}{2p}} \qquad 5\text{-}16$$

となる。

波長が非常に小さく、第 2 項が寄与する場合、池などで見られる表面張力波という。

$$v=\sqrt{\frac{2ps}{rl}} \qquad 5\text{-}17$$

波長に比べて水深が大きいときは、深さを h として、

$$v=\sqrt{gh} \qquad 5\text{-}18$$

である。例えば、深さ 5000m の海洋を伝わる、津波の速さは、

$$v=\sqrt{9.8\times 5000}=700(m/\text{sec})=2520(km/h) \qquad 5\text{-}19$$

である。大陸棚は水深 200m 平均として、v＝45m/sec＝162km/h の速さであるから、津波が発生したら、素早く高台に逃げることが大切である。

第三節　波の性質

反射

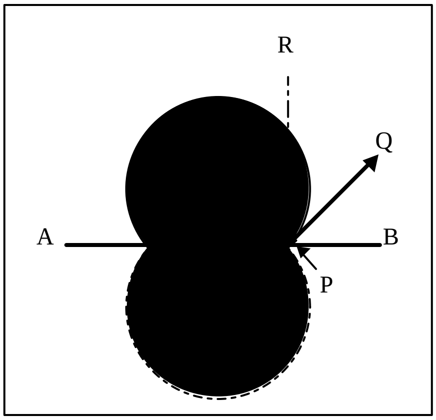


図 5-3 波の反射

図 5-3 のように、波源の O 点から伝わる球面波が、壁 AB で反射するとき、反射波は、AB に対する対称点 O' を波源とする、速さと波長が等しい波が、伝わるのと同等であり、O 点側のみの波面を考えればよい。

図から、入射角$\angle OPR$ と、反射角$\angle RPQ$ は同じ大きさであり、これを反射の法則という。反射波は、壁 AB で折り曲げても得られる。

屈折

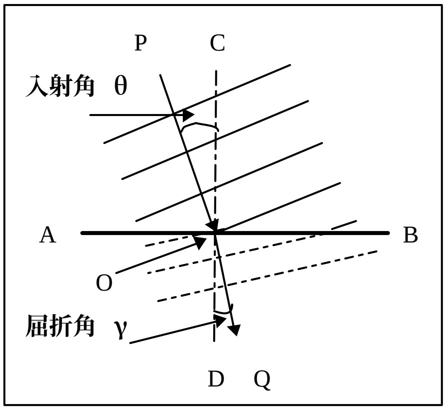


図 5-4 波の屈折

図 5-4 のように、壁 AB に平行平面波が伝わってきたとき、媒質の密度の違いにより、AB 面で屈折する。

AB に対する法線 CD と$\angle POC$、$\angle DOQ$ のなす角を入射角 θ、屈折角 γ とし、屈折率を n とすれば、屈折率は、

$$n = \frac{\sin q}{\sin g} \qquad 5\text{-}20$$

となる。また、入射側と屈折側の媒質中を伝わる波の速さを、それぞれ v_θ、v_γ、とすれば、次の式となる。

$$n = \frac{\sin q}{\sin g} = \frac{v_q}{v_g} \qquad 5\text{-}21$$

回折

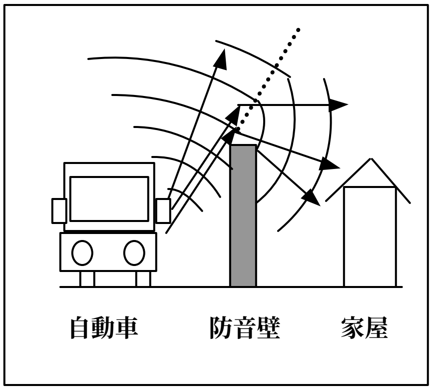


図 5-6 音波の回折

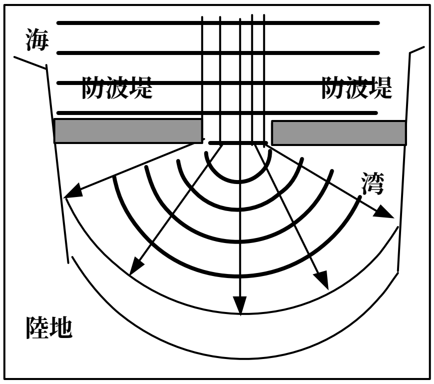


図 5-7 水面波の回折

図 5-6 は道路から伝わる騒音が、音壁の上縁で家屋の方に曲がってくる現象である。これを回折という。従って、防音壁の高さは、近辺の状況を充分把握して、決定しなければならない。

この回折現象は、図 5-7 のように、水面波でも起きる。外洋からの波が防波堤の間まで平行波として伝わり、その間を通過してから回折のため、湾内に円形波として広がり、防波堤の効果を薄めている。

干渉

図 5-8 は、二点を波源とする球面波が、互いに重なり合ったとき、山と山、谷と谷が重なる点では強め合い、山と谷が重なる点では弱め合う。

強め合う線と弱め合う線とが交互に並び、双曲線を描く。この現象を干渉という。

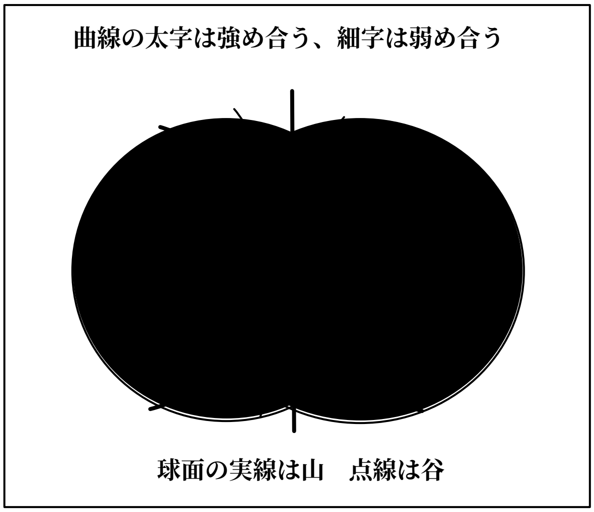


図 5-8 波の干渉

波の合成

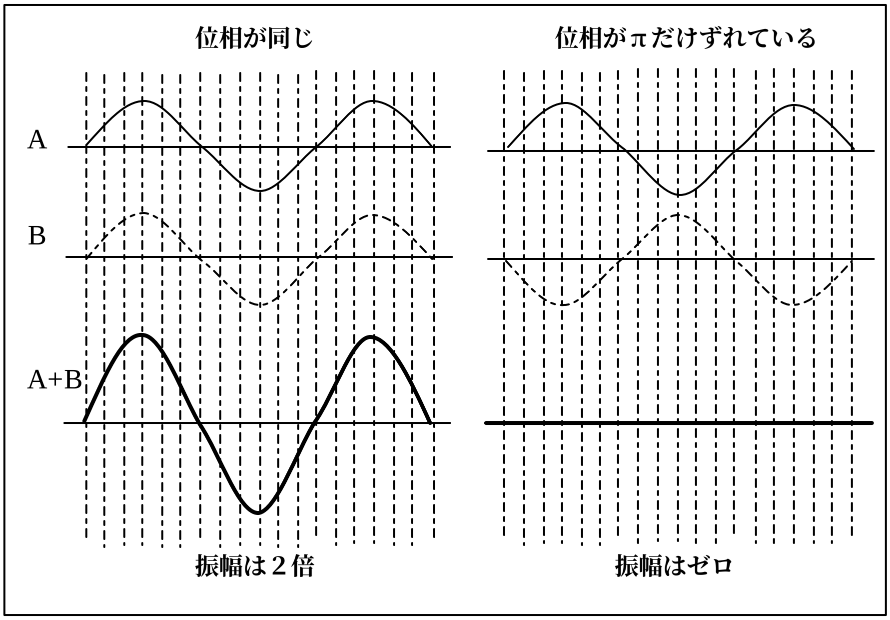


図 5-9 波の合成

図 5-9 は振幅と波長の等しい A、B の波が重なり合う場合、縦の点線上で、A と B の振幅を足して、合成波の振幅にする。そのとき、振幅がゼロを示す横の実線より上の振幅を正、下の振幅を負として計算する。

左の図は位相が同じ状態で重なった場合で、合成波の振幅は、元の波の振幅を 2 倍にしたものである。また、右の図は、位相がπだけずれて重なった場合で、媒質の振幅は互いにうち消されて、ゼロとなっている。

ここで、左の場合を強め合う、右の場合を弱め合うという。

第三章で記述した流体の抵抗の一つに、造波抵抗がある。これは、船首に取り付けた、瘤状の物体が発生させる波と、瘤のない通常の船首が発生させる波とが重なり合って、振幅がゼロとなることで、波をうち消し抵抗を激減させている。

また、騒音を減らす対策として、単純な周波数の音波であれば、位相がπだけずれた音波を、もとの騒音と重ねて伝わるようにし、音波をうち消す方法も開発されている。

球面波の合成と干渉縞の計算

図 5-10 のように、波源 O_1、O_2、から伝わる水面波のような円形波が干渉するとき、P 点では山が重なるから、互いに強め合う。

このとき、波長をλとすれば、隣り合う山と谷の距離はλ/2 であるから、$PO_1=6\lambda/2$、$PO_2=4\lambda/2$ で、次の式となる。

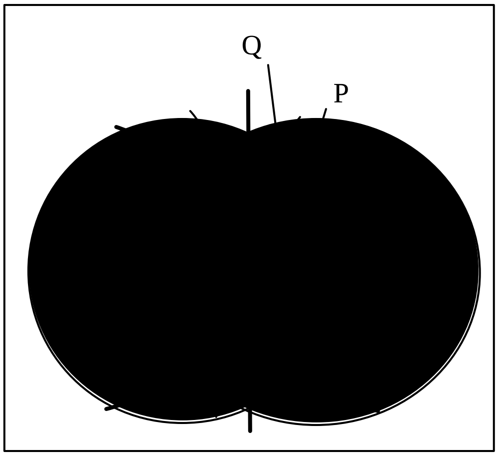


図 5-10 球面波の干渉縞

$$PO_1 - PO_2 = 6\cdot\frac{l}{2} - 4\cdot\frac{l}{2} = l \qquad 5\text{-}22$$

P 点を通る太い曲線上では、谷と谷が重なり、それぞれの位相に見合う重なりをするから、前項で記述した、波の合成による強め合う合成波が見られる。しかも、曲線状のどの点でも、$PO_1 - PO_2$ を計算すると、

$$PO_1 - PO_2 = nl \qquad 5\text{-}23$$

が得られる。ここで、n＝0、1、2、3、・・・・である。

次に、図中の Q 点では、$QO_1=6\lambda/2$、$QO_2=5\lambda/2$ となり、

$$QO_1 - QO_2 = 6\cdot\frac{l}{2} - 5\cdot\frac{l}{2} = \frac{l}{2} \qquad 5\text{-}24$$

である。

Q 点を通る細い曲線上では、山と谷が重なり、それぞれの位相に見合う重なりをするから、前項で記述した、波の合成による弱め合い振幅がゼロとなって、自然水面が見られる。しかも、曲線状のどの点でも、$QO_1 - QO_2$ を計算すると、

$$QO_1 - QO_2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)l \qquad 5\text{-}25$$

が得られる。ここで、n＝0、1、2、3、・・・・である。

定常波

図 5-11 のように、左右から、振幅と波長の等しい二つの波が近づき、時間の経過とともに、重なり合って定常波を作る。

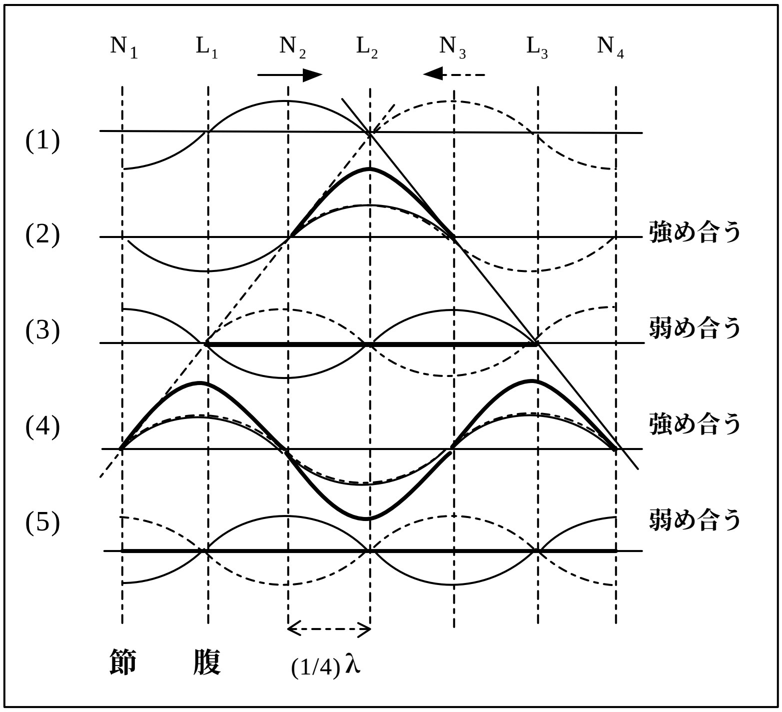


図 5-11 定常波の作図

ある時刻において、二波が(1)の状態にあった。λ /4 進んだ状態が(2)で、N_2 と N_3 の間で強め合い、振幅は 2 倍となっている。(3)では、L_1 と L_3 の間で弱め合い、振幅がゼロとなっている。(4)では、N_1 と N_4 の間で強め合い、振幅は 2 倍となっている。(5)では、N_1 と N_4 の間で弱め合い、振幅がゼロとなっている。

L_1、L_2、L_3 では、媒質は上下に振幅の幅で振動しており、このような箇所を腹（ループ）という。また、N_1、N_2、N_3 では、媒質は静かに静止しており、このような箇所を節（ノード）という。腹と節は交互に存在し、その位置を変えない。外観は、激しく振動する部分と、静止する部分が交互に並んだ進行しない状況である。このような合成波を定常波という。

第四節　音波

音波

　振動する物体により、空気が圧縮されたり膨張させられたりする。そのとき、空気粒子の密な状態と疎な状態が、交互に繰り返され、それが空気中を伝わり、我々人間の耳に達し、鼓膜を振動させる。それが音波として認識されている。

　音波は縦波であり、すべての物体中を伝搬する。室内の音が壁に入り、壁材を振動させ、壁材の振動が新たな振動源として、屋外の空気に粗密波を発生させ、音波として伝わっていく。我々人類が音というのは、空気中を伝搬する縦波のことである。同じ縦波の地震波の *P* 波は、固体中を伝搬するもので、音波とは表現していない。

　日常、音波は様々な音源から発せられ、楽器のような一定の法則に従った楽音の場合は、生活に潤いを与えるが、不規則な音波による騒音が、生活を妨害している。なお、音波の受容器官として、通常は耳が認知されているが、音波の全領域のすべてを、耳で把握しているとは言い難い。

　同じ音を聞いても、不快さには違いがあり、音の振動数の大小による反応の違いもある。自動車の騒音は、相当な影響を与えるが、さりとて、いっさい音を発しない自動車では、自動車の存在を知ることができない。

音速

　音波は、空気粒子の粗密という圧力変動が、時系列で伝搬する物理現象であるが、その速さは、0℃で 331*m/sec* であることはよく知られている。

　流体内の縦波の速さ v は、体積弾性率を k、密度をρとしたとき、

$$v = \sqrt{k/r} \qquad 5\text{-}26$$

である。

ここで、気体の圧力と体積弾性率の関係は、

$$k = gp \qquad 5\text{-}27$$

である。γは気体の定圧比熱と定積比熱の比で、ほとんどの気体で一定な値であり、γ＝1.4 である。従って、

$$v = \sqrt{g\frac{p}{r}} \qquad 5\text{-}28$$

である。

温度 0℃、圧力 1 気圧のとき、空気中の音速は、1 気圧=1.013×10^6 *dyn/cm*^{2}、ρ=0.001293 *g/cm*^{3}、γ=1.4 として、

$$v = \sqrt{\frac{1.4\times1.013\times10^6}{0.001293}} = 331(m/\sec) \qquad 5\text{-}29$$

となる。

温度が *t*℃の時の音速 v_t は、

$$v_t = 331 + 0.6t(m/\sec) \qquad 5\text{-}30$$

と計算される。なお、音速は気圧に関係せず、湿度の影響も無視できる。

音の伝わり方

反射は波一般の反射の法則に従う。ただ、遠くの物体によって反射した音波が、瞬時の後、聞こえてくる山彦のような反響と言う現象や、音楽ホールなどで直接音以外の反射音による、残響という現象もある。この残響は、音楽の種類により、その残響時間が適切でなければ、音楽性が著しく損なわれる。

媒質の音速の違いによる屈折は、気温が高い方ほど音速が速く、気温の低い方へ曲がる。このため、日中は地面近くよりも、上空へいくほど気温が低く、音は上空へ曲がり遠方へは伝わらない。ところが、夜間は、その逆の気温配置のため、音波は地上の方へ曲がり、遠方まで伝わる。従って、夜間は遠くの音がよく聞こえてくる。

第五節　音の三要素

高さ

振動数 f、波長λの音波が速さ v で伝わるとき、気温を t とすると、

$$v = fl = 331 + 0.6t \qquad 5\text{-}31$$

である。気温 20℃は常温といい、そのときの波長は、

$$l = \frac{343}{f} \qquad 5\text{-}32$$

となる。音程におけるハ長調のハ音の振動数は 256*Hz* であり、*Hz* はヘルツと呼び、単位は 1/*sec* を用いる。そのときの波長は、

$$l = \frac{343m/\sec}{256 \cdot 1/\sec} = 1.34m \qquad 5\text{-}33$$

となる。

歌手が発する振動数は、バスの 81*Hz*〜ソプラノの 1035*Hz* と測定されており、波長では、4.23*m*〜0.33*m* である。

音の高低は、振動数が大きいほど、波長が小さいほど高音である。

ここで、ハ音の 256*Hz* を、一波長の波形で表現すれば、波長 1.34*m* の音波が、1 秒間に 256 波形分、通過することを意味する。

音楽ホールの、ステージから真正面の壁面まで 34.3*m* とすれば、ステージで発せられた音波は、0.2 *sec* 後に戻り、ステージの壁面で反射した反射波が再び観客席の方向へ伝わる。このことが何度となく繰り返されるために、観客の耳には数秒の間、同じ音波が入ってくるから、音がまろやかに感じられる。このことを残響といいそれが持続する時間を残響時間という。

交響曲の演奏には、残響時間は 1.2 *sec* 程度が適当であるとされている。学校の体育館で講演を聴く場合、聴きづらいのは、残響時間が 3 *sec* を越えるのが普通であり、残響時間を減らすために、反射を防ぐ工夫が必要である。そのため、空気層を有し、穴があけられた板を張った二重板を、壁面に張り付けている場合が多い。

音の強さ

音の強さは、音波の伝わる方向に垂直な単位面積を、単位時間に通過する振動エネルギーで測定される。

いま、音の強さを I、媒質の密度ρ、音速 v、振幅 a、振動数 f とすれば、

$$I = \frac{1}{2} r v a^2 f^2 \qquad 5\text{-}34$$

と求められる。ここで、媒質の密度ρと振動数 f が一定であれば、音速 v も一定として、音の強さ I は振幅 a の 2 乗に比例する。従って、太鼓を強く打てば、振幅が大きくなり音は強くなる。

音波が、空間のある部分に圧力変化を作りだしたとき、それを音圧という記号で P とすれば、音の強さ I は、次の式となる。

$$I = \frac{P^2}{2 r V} \qquad 5\text{-}35$$

I の単位は $watt/cm^2$ である。ここで、1 ワット＝1*watt* = 1 *joule/sec* = 10^7 *erg/sec* であり、単位時間にやりとりするエネルギーの大きさを示し、仕事率という。

音の、人間感覚における大きさ

耳で感じる音の大きさは、音の対数に比例することが測定されている。ある音の強さ I を聞いたときの感覚を L、基準音の強さ I_0 を聞いたときの感覚を L_0、とすれば、L と L_0 の差は、

$$L - L_0 = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad 5\text{-}36$$

である。また、5-35 式から、$I/I_0 = (P/P_0)^2$ であるから、

$$L - L_0 = 20 \log \frac{P}{P_0} \qquad 5\text{-}37$$

となる。

大きさの基準には、P_0=0.0002 dyn/cm^2、$I_0=10^{-16}$ $watt/cm^2$、を 0 *db* として

いる。db はデシベルと呼ぶ。例えば、音の強さ $I=10^{-14} watt/cm^2$ の大きさは、

$$L-L_0=10\log\frac{10^{-10}}{10^{-16}}=10\log 10^6=60(db) \qquad 5\text{-}38$$

となる。この音の大きさを db 単位で示し、音の大きさのレベルという。

図 5-12 は、音の環境と音の強さ、大きさである。ただし、音の大きさは時々刻々変化しているから、これらは大体の目安である。しかも、現実の音による公害感は、様々な振動数の音が同時に伝わり、音の高低についての不興感覚も個人差があり、一様には把握しにくい。そのため、1000Hz の純音を聞いたときの大きさを基準にし、それと実際の騒音を聞いたときと比較して判断している。

環境	大きさ	強さ
	db	$watt/cm^2$
田園	20	10^{-14}
静かな住宅地	40	10^{-12}
駅のロビー	60	10^{-10}
繁華街	80	10^{-8}
地下鉄内	90	10^{-7}
列車ガード下	120	10^{-4}
耳が痛い	140	10^{-2}

図 5-12 音の大きさと強さ

音色（ねいろ）

楽器の音や会話する人を特定できるのは、波長と振幅が同じ音波でも、波の波形が異なり、それを脳が瞬時に分析し、波形の微妙な違いを判断しているからである。

このように、音源から伝わる音波の波形が音色を示す。

波形の観察は、オシロスコープで行うが、図 5-13 は、いくつかの例である。

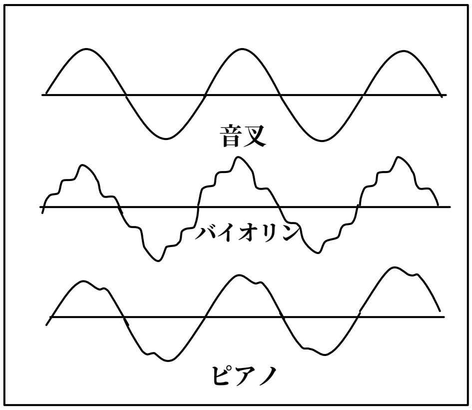


図 5-13 楽器の音色

第六節　発音体の振動

弦の振動

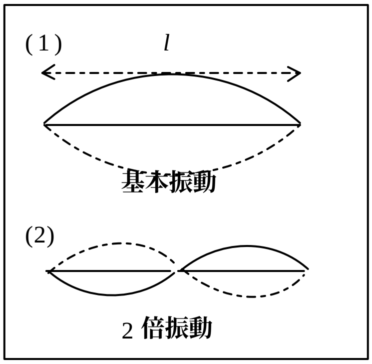


図 5-14 弦の振動

細い針金の両端を固定して張り、指で弦の方向と垂直方向に弾くと、振動は v の速さの波として伝わる。ここで、$v=\sqrt{T/S}$ であり、T は張力、S は線密度である。弦の波は、弦の固定された端で反射するが、固定端は波の節となり、反射波は位相がπだけずれた波形となる。このため、進行波と反射波は、第三節定常波の項のように、定常波を作る。

弦の長さを l、振動の波長を λ_1、図 5-14(1)のように、$\lambda_1/2$ の波形を作る定常波の場合、振動数を f_1 とすると $l=\lambda_1/2$、$v=f_1\lambda_1$ であるから f_1 は、

$$f_1=\frac{v}{l_1}=\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{S}} \qquad 5\text{-}39$$

となる。これを基本振動といい、これから発せられる音を基本音という。

(2)は λ_2 の定常波の場合、振動数を f_2 とすると $l=\lambda_2$ だから f_2 は、

$$f_2=\frac{v}{l_2}=\frac{2}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{S}} \qquad 5\text{-}40$$

となる。これを 2 倍振動といい、発する音を 2 倍音という。

このように、半波長を一つの区分として、定常波が発生すると考えて、いま、n 個の $\lambda/2$ の波形ができる場合、振動数を f_n は、

$$f_n=\frac{v}{l_n}=\frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{S}} \qquad 5\text{-}41$$

となる。これを n 倍振動といい、発する音を n 倍音という。弦のそばに空気を内蔵する箱があれば、弦の振動が箱と共鳴し、大きな音が聞こえる。これを共鳴という。

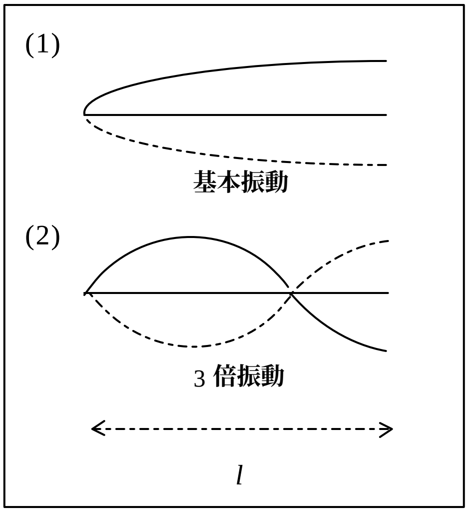


図 5-15 弦の振動

針金の一端を固定し、他端を解放する場合は、解放端での定常波は、腹となり、振動の波長をλ_1、図 5-15(1)のように、$\lambda_1/4$ の波形を作る定常波の場合、振動数 f_1 は、$l=\lambda_1/4$、$v=f1\lambda_1$ であるから、

$$f_1 = \frac{v}{l_1} = \frac{1}{4\ell}\sqrt{\frac{T}{S}} \qquad \text{5-42}$$

となる。これを基本振動といい、これから発せられる音を基本音という。

次に、(2)のように、$3\lambda_3/4$ の波形を作る定常波の場合、振動数を f_3 とすると $l=3\lambda_3/4$ だから f_3 は、

$$f_3 = \frac{v}{l_3} = \frac{3}{4\ell}\sqrt{\frac{T}{S}} \qquad \text{5-43}$$

となる。これを 3 倍振動といい、発する音を 3 倍音という。

このように、$\lambda/4$ 波長を一つの区分として、定常波が発生すると考えて、いま、n 個の $\lambda/4$ の波形ができる場合、振動数を f_n は、

$$f_{2n-1} = \frac{v}{l_{2n-1}} = \frac{2n-1}{4\ell}\sqrt{\frac{T}{S}} \qquad \text{5-44}$$

となる。これを 2n-1 倍振動といい、発する音を 2n-1 倍音という。

管内の気柱振動

管楽器は管内に、空気を吹き込むと音が出る。また、発音体を管の入り口近くに置くと、音が出る。このとき管内には、縦波が発生して定常波を作っている。

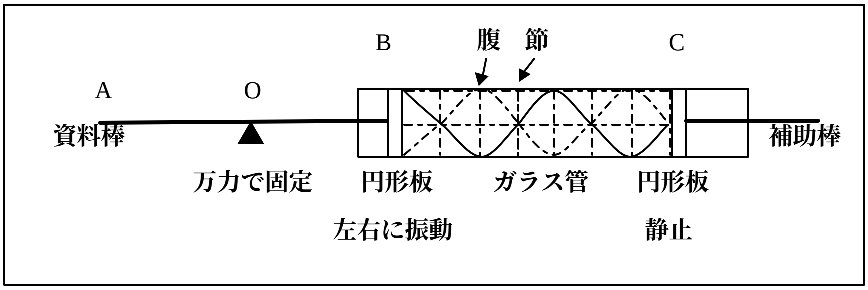


図 5-16 棒と空気柱の共振

Kundt（クント）の実験によるヤング率の測定

図 5-16 のように、万力で資料棒の中点 O を固定し、O から A の方向へ布で摩擦すれば、棒には縦波が発生し、O を経て他端 B の円形板で反射し定常波を作る。他端 B はガラス管内にあって、左右に振動するから、管内の空気柱が振動させられ、音波を発生する。この音波は、ガラス管の他端に設置された、補助棒で自由に動かせる円形板 C で反射し、定常波を作る。この定常波は、気柱の長さ BC が定常波のλ/2 に対して整数倍のときガラス管と共鳴し高音を発する。

円形板 B は振動するから、それに接する空気は激しく振動し、定常波の腹となり、他端の円形板 C は静止しているから節となる。

いま、管内にリポコデュウム（石松子）かコルクの粉末を撒き、実験すると、管内には図 5-17 のような、縞模様ができる。縞の長さは腹の位置

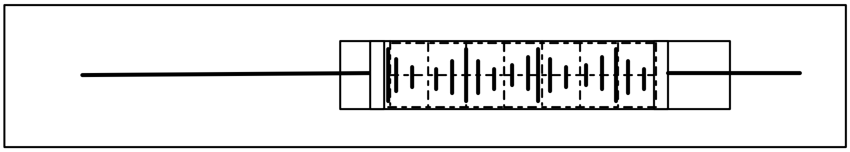


図 5-17 定常波によるコルク粉の分布

で最長、節の位置で最小となっている。隣り合う最長縞の長さを測定し、その平均値を l とし、それを定常波の波長 λ=2 l、音速 v と振動数 f から、

$$f=\frac{v}{l}=\frac{331+0.6t}{2\ell} \qquad \text{5-45}$$

となる。ここで、t は気温である。

資料棒の長さ L、密度 ρ、棒中を伝わる縦波の速さ v'、波長を λ' とすれば、

$$l'=2L \qquad v'=l'f=2Lf \qquad \text{5-46}$$

となる。

棒の質量を M とし、棒の半径を r とすれば、密度 ρ は、

$$r=\frac{M}{pr^2L}$$

となる。

第二節第二項で、棒状固体における縦波の速さの式から、ヤング率 E は、

$$E=v'^2r=\frac{4f^2LM}{pr^2}=\frac{2(331+0.6t)^2LM}{pr^2\ell^2} \qquad \text{5-47}$$

となる。

これはクントの実験による、ヤング率の測定といい、材料の検査に用いられている。

管内気柱の閉端反射

図 5-18 のように、閉端に粒子の密集部（密部）が伝わると、前方へ進めず、もっと圧縮され、逆方向へ密部を送り返すが、これが反射波である。この反射波は、入射波の山が、そのまま折り返したように伝わる。従って閉端では、定常波の節となる。しかし、圧力変化は最大である。

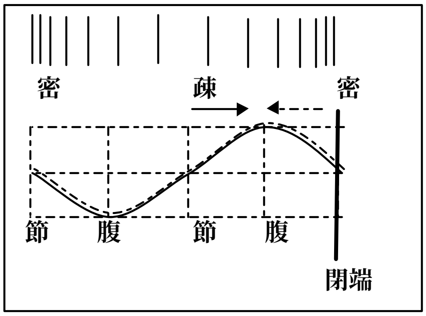


図 5-18 音波の閉端反射

閉管内の空気振動

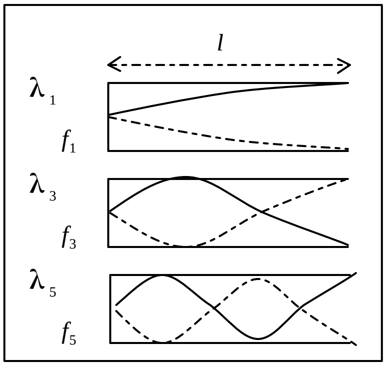


図 5-19 音波の開端反射

図 5-19 のように、一端が閉じている管を閉管という。定常波は開端で腹、閉端で節となる。試験管などの管の入り口で吹いたとき、音が出るが、ふき方を違えると音の高低が出せる。

基本振動の波長 λ_1、振動数 f_1、とし、管の長さを l、空気中の音速を v とすれば、

$$f_1 = \frac{v}{l_1} = \frac{v}{4\ell} \quad \text{5-48}$$

である。

3 倍振動の波長 λ_3、振動数 f_3、とすれば、

$$f_3 = \frac{v}{l_3} = \frac{3v}{4\ell} \quad \text{5-49}$$

となり、2n-1 倍振動では、次の式となる。

$$f_{2n-1} = \frac{v}{l_{2n-1}} = \frac{(2n-1)v}{4\ell} \quad (n = 1、2、3、・・・) \quad \text{5-50}$$

管内気柱の開端反射

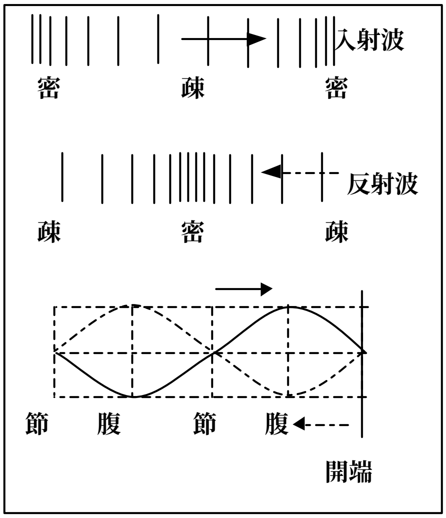


図 5-20 気柱内の圧力

図 5-20 のように、開端に粒子の密集部（密部）が伝わると、管外へ粒子が吹き出し開端が低圧となり、管外から粒子が吹き込み、疎らな状態で反射波が発生する。疎部が伝わると低圧部に吹き込む粒子が密集状態となった反射波となる。開端部では大気と接しているから空気密度は変化しないが、空気の振動は最も激しい。

開管内の空気振動

図 5-21 のように、開管では両端が腹となる。フルートやクラリネットなどの管楽器は、ほとんど開管で作られている。

基本振動の波長をλ_1、振動数をf_1、とし、管の長さを l、空気中の音速を v とすれば、$\ell = l_1/2$ であるから、基本音の振動数f_1は、

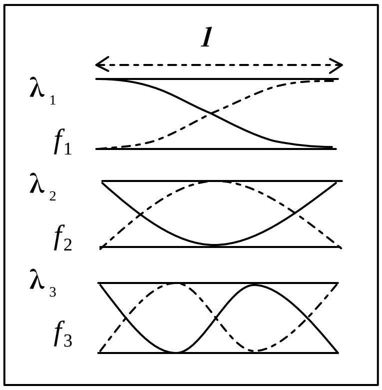


図 5-21 開管の空気振動

$$f_1 = \frac{v}{l_1} = \frac{v}{2\ell} \qquad \text{5-51}$$

となる。

2 倍振動の波長をλ_2、振動数をf_2、とすれば、2 倍音の振動数は、

$$f_2 = \frac{v}{l_2} = \frac{2v}{2\ell} \qquad \text{5-52}$$

となり、n 倍振動では、

$$f_n = \frac{v}{l_n} = \frac{nv}{2\ell} \quad （n=1、2、3、・・・） \qquad \text{5-53}$$

となる。

図 5-22 は自然長音階を吹く、精密ではない模型的な縦笛である。

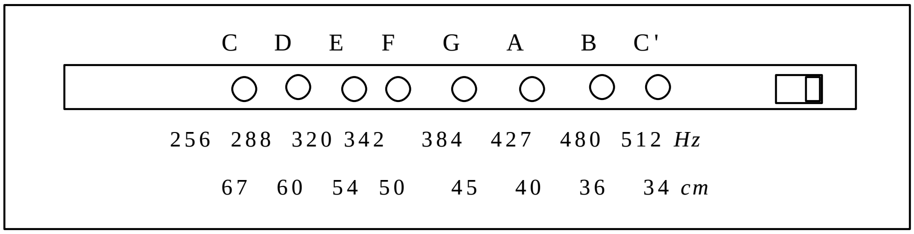


図 5-22 縦笛

すべての孔をふさぎ、C を空けて吹くと、C 音（ハの音）が出る。*cm* 単位の数字は開管の長さであり、*Hz* 単位の数字は各音の振動数である。

第七節　共振と共鳴

固有振動数と共振

ギター弾くと、振動する。このような振動を自由振動という。ブランコに一定の周期で力を加えると、振動がだんだん激しくなるが、このように外力の振動数がブランコの振動数と同じとき、強制振動と言う。逆に、ブランコの振動が弱くなるように、外力を作用させるときを、減衰振動という。

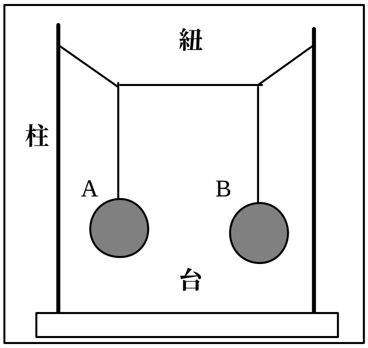


図 5-23 連成振動

図 5-23 のように、紐で結ばれた球 A と B が静止している。いま、A を静かに引き,手を離せば、A は単振動をするが、次第に振幅が減り始め、ついに静止してしまう。ところがそれに反して B は、振動を始め、だんだん振幅が大きくなり、A が静止したときに最大の振幅で振動する。

B に対して A がその固有振動数で、強制振動を起こさせたことを示す。この場合の振動を連成振動ともいう。図 5-24 は種々の振動波形である。

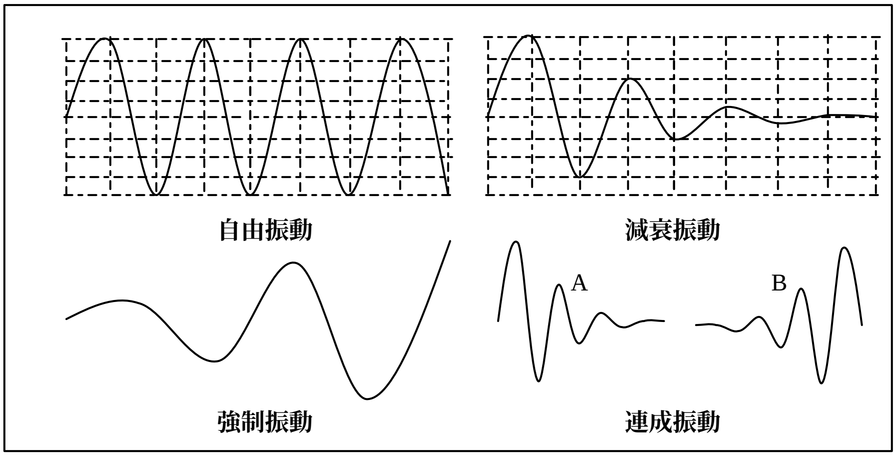


図 5-24 振動の種類

共鳴

弦楽器や打楽器は、弦や膜の振動だけでは音が小さい。このため、軽くて薄く、共振しやすい木材などで箱を作り、発音体の振動と共振させ、大きな音を得ている。このような装置を共鳴箱という。

ギターのように、区切られた音しか出せないのに比べ、バイオリンは、弦の押さえ方により、微妙な音の変化が出せるので、共鳴箱の構造が複雑になっている。すなわち、一つの音に対する共鳴は、その音の波長について、整数倍の気柱長が必要であるから、上下、左右、前後の、共鳴箱の長さが用意されている。従って、形は複雑となっている。

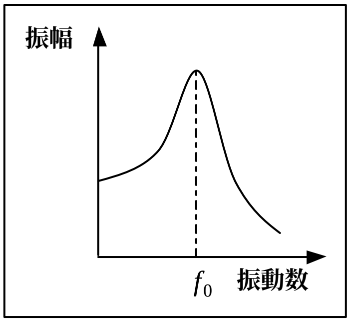


図 5-25 共鳴

図 5-25 は、共振させる外力の振動数と振動体の振幅との関係である。図中の f_0 は、振動体の振幅が極大になるときの振動数で、固有振動数という。このとき共鳴箱の固有振動数が f_0 に等しければ、大きな音がする。これを共鳴という。

気柱共鳴による音速の測定

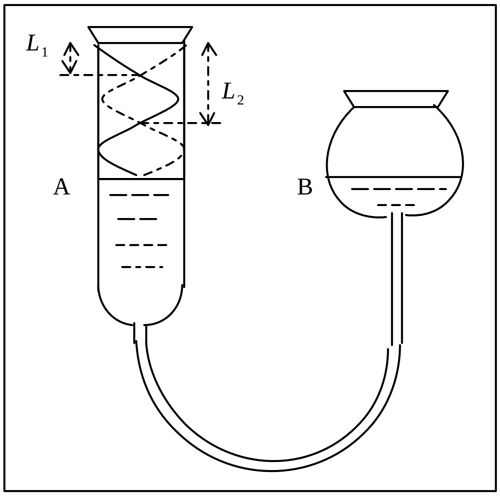


図 5-26 気柱共鳴による音速測定

図 5-26 の装置で音の速さを測定している。音叉を管の入り口で鳴らし、水槽を操作して水面を下げていくと高さ L_1 と L_2 で共鳴した。音叉の発する音波の波長をλ、音叉の振動数を f とすれば、L_1=λ/4 , L_2=3λ/4 だから、音速を V として、

$$V = fl = 2(L_2 - L_1)f \quad \text{5-54}$$

となる。

第八節　Doppler（ドップラー）効果とうなり

ドップラー効果

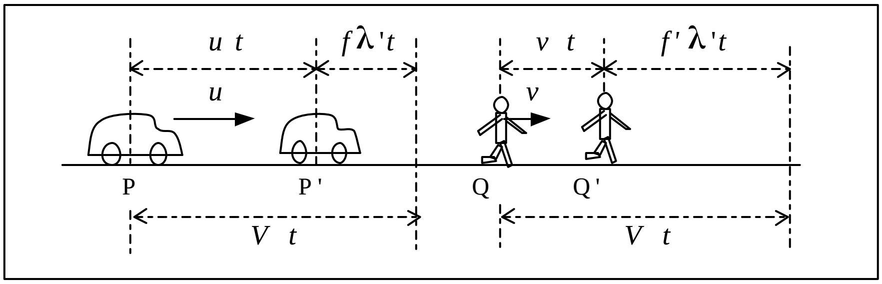


図 5-27 ドップラー効果

図 5-27 のように、自動車が速さ u、人が速さ v で右方向へ進んでいるとき、自動車から発せられた音波を、人が聞く場合を考える。ただし、左向きの速さは負とする。

いま、時間 t の間に、自動車が P'点、人が Q'点に到達した。このとき、自動車から発せられた音波は、時間 t が始まる位置 P から Vt だけ伝わっている。その間、自動車は ut だけ進み、P'点に来ている。そして、音波の波長をλとすると、$f\lambda' t$ の距離に圧縮されたことになる。図から、距離の計算をすれば、

$$f l' t = Vt - ut \qquad \text{5-55}$$

となり、時間 t を消去して、次の式となる。

$$f l' = V - u \qquad \text{5-56}$$

また、人が Q 点で、時間の始まりに受けた音波は、Vt だけ伝わっている。その間、人は vt だけ進み Q'点に来ている。時間 T の間に人が受ける音波の振動数を f' とすれば、図から同様の計算をすれば、

$$f' l' = V - v \qquad \text{5-57}$$

となる。式 5-56,5-57 から、人が受ける音波の振動数 f' は次式となる。

$$f' = \frac{V - v}{l'} = f\,\frac{V - v}{V - u} \qquad \text{5-58}$$

f'が f より大きくなれば音が高く聞こえ、小さくなれば低く聞こえることをドップラー効果という。これは、音源と観測者との相対運動により判断できる。すなわち、両者の相対距離が小さくなるときは $f'>f$ であり、音が大きく聞こえ、大きくなるときは $f'<f$ であり、音が低く聞こえる。

野球で、投手が投げるボールのスピードを 150*km/h* などと発表している。ネット裏でスピードガンを構える人は、静止しているので、5-58 式の v を 0 とおき、投げた瞬間の速さを u、電波の振動数が減衰する率を f/f'、速さを V とすれば、

$$\frac{f}{f'}=1-\frac{u}{V} \tag{5-59}$$

となり、さらに、次の式で u を測定し、デジタルで表示している。

$$u=\left(1-\frac{f}{f'}\right)V \tag{5-60}$$

ドップラー効果は、宇宙空間における、惑星や恒星の運動を観測するために用いられている。例えば、星から伝わる光波を、スペクトル分光計で観測すると、各色光とも赤色光の方へずれており、これは、星が地球から遠ざかっていることを表している。これを赤方変移という。

うなり

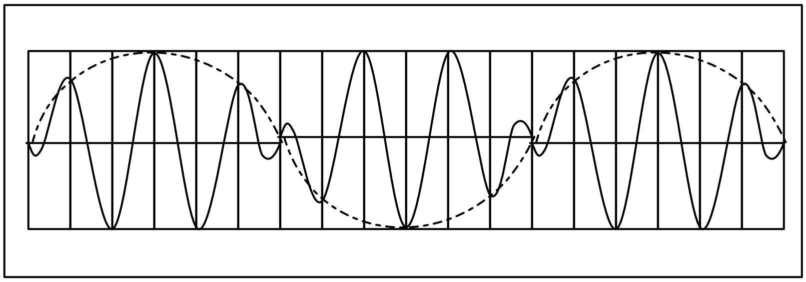


図 5-28 うなり

図 5-28 は、振動数が少し違う二つの音波を、同時に鳴らすと、振幅が連続的に変化する合成音となる。二つの音波の振動数を n_1、n_2、1 秒間のうなりの回数を n とすると、次の式となる。この現象をうなりという。

$$n=n_1 \sim n_2 \tag{5-61}$$

第九節　地震波

地震波の種類と速さ

弾性体である地殻に、ずれや急激な圧力変動が発生すると、そこを波源とする弾性波が伝わる。この現象を地震という。波源を震源、震源真上の地表を震央、伝わる弾性波を地震波という。

図 5-29 のように、地震波には縦波（*P* 波）、横波（*S* 波）、表面波（*L* 波）の三種類がある。

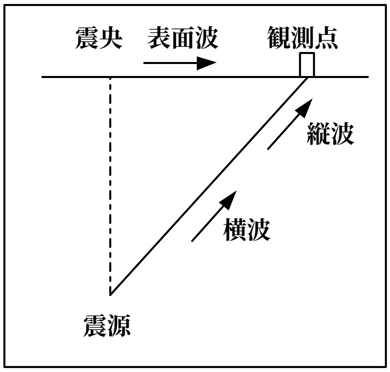


図 5-29 地震波と震源

それぞれの速さは、岩石の密度をρ、体積弾性率を *k*、剛性率を *n* とし、縦波の速さを V_p、横波の速さを V_S、表面波の速さを V_L、とすれば、次の式となる。

$$V_P = \sqrt{\frac{k + 4n/3}{r}} \qquad 5\text{-}62$$

$$V_S = \sqrt{\frac{n}{r}} \qquad 5\text{-}63$$

$$V_L = 0.9194 V_S \qquad 5\text{-}64$$

地表から数十キロの深さでは、V_p = 5.6〜5.9 *km/sec*、V_S = 3.5〜3.6 *km/sec*、V_L= 3.3〜3.6 *km/sec* である。

地震波形

図 5-30 は地震計の記録であるが、観測点に到達する順に、初期微動、主要動、後期微動の三つに分けられる。

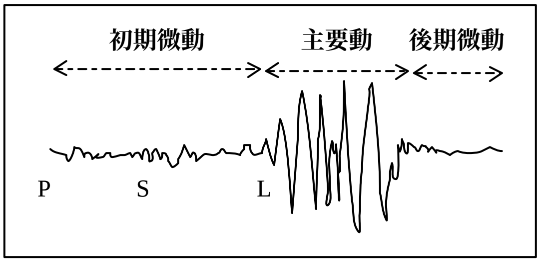


図 5-30 地震波形

初期微動は P 波と S 波であり、球体の全方向に伝わるので減衰が激しい。主要動は L 波であるが、地球の表面に沿って水面波のような波で、減衰は少ない。

L 波は Rayleigh（レイーリー）が理論的に示したので、レイーリー波ともいう。

震源距離と大森公式

図 5-30 で P 波の波形の継続時間を、初期微動継続時間といい、それを t 、震源の距離を x とすると、その単位を km、t を sec として、

$$x = 7.42t \tag{5-65}$$

となることを、実験的に示した大森公式がある。この式は x が数百 km までの範囲で用いられ、千 km 以上の場合では、

$$x = 6.54t + 720 \tag{5-66}$$

を用いる。

震源の決定は、数カ所の観測データを解析して行われる。図 5-31 のように、観測点 A、B、C で計算した震源距離を半径とする円を描き、三者の共通領域に震源があるとしている。

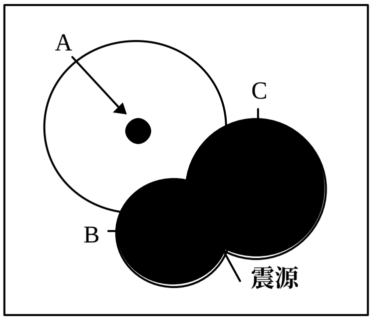


図 5-31 震源の決定

震源距離が 100km 程度では、S 波と L 波の速さがほぼ等しく、両者の波が同時に伝わり、初期微動継続時間の P 波から、主要動の L 波に続く。このため、連れが始まってからの時間が 10sec であれば、約 80km の所が震源であると判断すればよい。阪神淡路大地震のような、活断層による直下型の場合は、前触れの初期微動もなく、主要動が伝わり、避難する時間がなく、このような地震の研究が急がれる。

一章の問題

1-1　石ころを真上に投げあげたり、水平に投げたり、斜め上方に投げたりする場合の軸はどう設定するのが望ましいか。

1-2　二次元直交 X-Y 座標で物質 P,Q の位置が P(1,2),Q(4,5)であるとき、P と Q との距離を求めよ。

1-3　直交座標以外の軸構成を二つ説明せよ。

1-4　三次元直交 X-Y-Z 座標で物質 P,Q の位置が P(1,2,3),Q(4,5,6)であるとき、P と Q との距離を求めよ。

1-5　1-1 式により、二次元直交座標で、P,Q の物質が 2 秒間に、P(2,2)から Q(4,4)に移動したときの速度を計算せよ。

1-6　ベクトル OA、OB、OC、OD、OE が O 点からランダムに存在するとき、その合ベクトルを求める方法を説明し、その結果を用いて、合ベクトルを簡単に見つける方法を箇条書きにせよ。

1-7　1-1 式で示される速度ベクトルが V_1、V_2 で、互いになす角度が 60 度のとき、合速度ベクトル V を計算せよ。

1-8　ある物質の一点 O に、ベクトル A、B、C が異なる三方向に作用しているとき、これらの合成ベクトルを D とすれば、ベクトル D はゼロかゼロでないか、のいずれかになる。前者の場合、ベクトルが互いに他をうち消すというが、そのときに成立する法則を箇条書きにせよ。また、後者の場合、これらのベクトルを力と考えれば、物質に対してどんな現象を引き起こすか説明せよ。

1-9　地球の半径を R、質量を M とし、ある恒星の半径が r,質量を m とするとき、太陽からの距離をそれぞれ、S , s とすれば、地球と恒星が太陽から受ける引力の比を計算せよ。

1-10　高度 3600km で地球を、円軌道で回る人工衛星が受けている引力の大きさを計算せよ。地球の半径を 6300km、地球の質量を $5.974\times10^{24}kg$、人工衛星の質量を 200kg とせよ。ただし万有引力定数（6.6720×10^{-11} $N\cdot m^2/kg^2$）の単位の中にある N はニュートンと呼び、力の単位であ

るが、$1N$＝9.8 $kg \cdot m/s^2$であり、$1m/s^2$＝$(1m/s)/1s$である。

1-11　人工衛星が、地球を一回転する時間を周期というが、問題 10 の例の周期を求めよ。ただし、地球の平均速度を 2.978×10^4 m/s とせよ。

1-12　東方を X 軸、北方を Y 軸とする X-Y 座標平面で、物体が座標 P (1,1)から 10 秒後に座標 Q(4,5)へ移動した。この物体の速度を求めよ。また、さらに 10 秒後に物体は R(7,1)に移動し速さが 25m/s となった。このときの加速度を求めよ。

1-13　自動車が 36km/h で、まっすぐで水平な道路を、同じ速さで走行していたが、加速後 10 秒間で 72km/h となった。このときの加速度の大きさを求めよ。次に、50 秒間は同じ速さで走行したが、その後減速し、20 秒後に静止した。このときの加速度の大きさをそれぞれ求めよ。また、この自動車の運動を x-y 座標のグラフに表現し、加速度の大きさはグラフの何で判断できるか述べよ。ただし、長さは m、時間は s に換算せよ。

1-14　小石を鉛直上方に 4.9m/s で投げ上げた。最高点に到達する時間を求めよ。ただし重力加速度を 9.8m/s^2 とせよ。

1-15　直線軌道の列車が、A 駅から B 駅まで平均の速さ V_1 で走り、B 駅から A 駅まで平均の速さ V_2 で戻ってきた。この場合、往復の平均の速さがいくらになるか求めよ。ただし、B 駅における折り返し時間は 0 とする。

1-16　1-23 と 1-24 式を導け。

1-17　1-23 式は、S が T の二次関数であることを示すが、このグラフの接線の傾きが、加速度αを与えることを証明せよ。

1-18　1-23 式の S を T で微分すると 1-20 式となり、それをさらに、V を T で微分すれば加速度αとなることを示せ。またこの逆の操作として、積分を計算すると、元の 1-23 式となることを示せ。

1-19　落下運動の第一から第四までの公式を導け。

1-20　斜め方向投射運動（放物運動とも言う）において、最高点の高さ H と到達距離 X を求める公式を導け。

1-21　鉛直投げ上げ運動の場合、任意の高さを通過する速さは、向きが反対で、大きさが等しいことを証明せよ。

1-22　初速（初速度の大きさをこう呼ぶこともある）9.8*m/s* で小石を真上に投げ上げた。投げた位置に戻るまでの時間と最高点の高さを求めよ。

1-23　初速 150*km/h* で、地面に対して 30°の角度で小球を投げた。 最高点の高さと到達距離を求めよ。また、この初速で、何度の角度で投げると、最大到達距離となるか、求めよ。また、その距離はいくらか。

1-24　図 1-22 において、物体の質量、紐の張力、外力、加速度を設定し、各物体ごとの運動方程式と、全体を一つの物体と考えたときの運動方程式を作れ。また、それぞれの運動方程式の関係から、どのようなことが言えるか書け。

1-25　物体を斜面に載せ、次第に傾けたとき斜面の角度が 30°のとき、滑り始めた。いま、角度を 45°にして物体を載せると、下方へ滑り降りた。そのときの加速度はいくらか。また、2 秒後の位置と、そのときの速さはいくらか。

1-26　摩擦力の大きさは、静止最大摩擦力＞静止摩擦力＞滑り摩擦力＞転がり摩擦力、の順になっている。摩擦の凝着説により説明せよ。

1-27　図 1-25 の矢印に力を記入せよ。

1-28　図 1-28 を用いて、寺院が地震に強い事を説明せよ。

1-29　時間 4 秒の間に、円周上を 60°回転する物体の角速度はいくらか。

1-30　質量 1000*kg* の自動車が、半径 10*m* の円周に沿って時速 100*km* で走るとき、必要な向心力はいくらか。

1-31　単車で人を乗せてカーブを走るとき、向心力 F、曲率半径 r、速さ V、運転手の質量 M、同乗者の質量 m としたとき、$M+m$ の走行、M だけの走行別に、$F-r$、$F-V$、$r-V$ グラフを作成せよ。

1-32　単振動をする物体に働く外力と、変位の関係を解説せよ。

1-33　式 1-61 を証明せよ。

1-34　図 1-45 の A では、バネ定数 K_1 の伸びを x_1 、バネ定数 K_2 の伸びを x_2 とし、合成バネ定数を K_A とすれば、$1/K_A＝1/K_1＋1/K_2$ となることを証明せよ。

1-35　質量 250*kg* の単車と、質量 2500*kg* のトラックが、時速 60*km* で正面衝突した。跳ね返りの係数を 0.2 として、衝突後の速さは、それぞ

れ、いくらになるか。

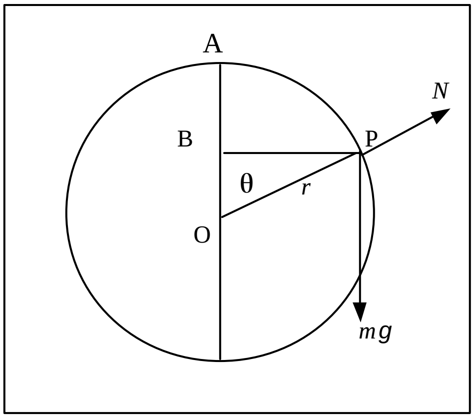
1-36　落下する物体が、床との角度を 30°で斜めに、速さ 10*m/s* で衝突した。跳ね返りの係数を 0.4 としたとき、衝突後の速度を求めよ。

1-37　質量 100*g* の物体が、10*m/s* で運動するときの運動エネルギーはいくらか。

1-38　質量 100*g* の物体が、高さ 10*m* に持ち上げられたときの位置エネルギーはいくらか。

1-39　速さ 20*m/s* で運動している物体に、100*N* のエネルギーが与えられ、速さが 5*m/s* になった。この物体の質量はいくらか。

1-40　弾丸を 200*m/s* の速さで木材に打ち込むと、3*cm* の深さまで入るという。このとき、打ち込む速さを 2 倍にするとどれだけ入るか。ただし、木材の抵抗力は同じであるとする。



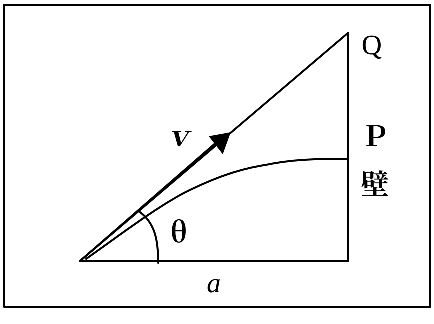
1-41　右図のように、質点が、半径 *r* の滑らかな円筒の最高点から滑りおちるとき、質点はどこで離脱するか。

1-42　放物運動をしている物体が突然分裂し、角度θ離れた方向へ運動を続けた。この運動を解説せよ。

1-43　単振り子の錘を水平の円を描かせて運動させるとき、これを円錐振子というが、この場合の、周期と糸の張力を求めよ。

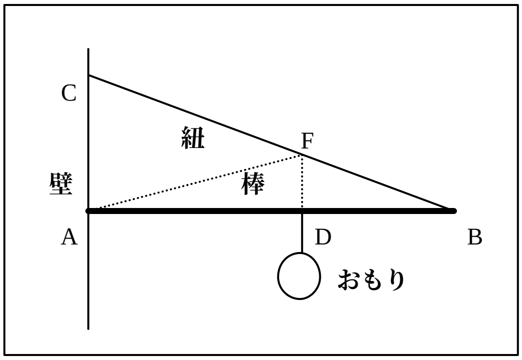
1-44　物体を初速 *v* で投げ、前方に *a* だけ離れている鉛直の壁に、垂直にぶつけるには、水平と角度θで投げるときθはいくらか。

また、最初の投げる方向の壁 Q 点は P 点の高さの 2 倍であることを示せ。

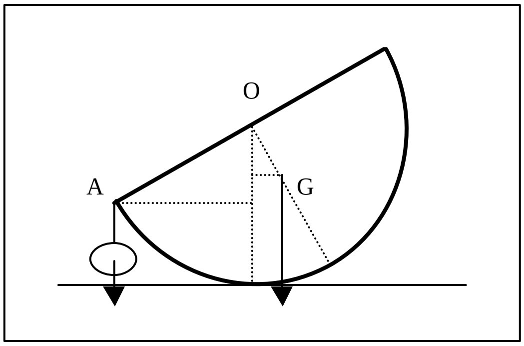


二章の問題

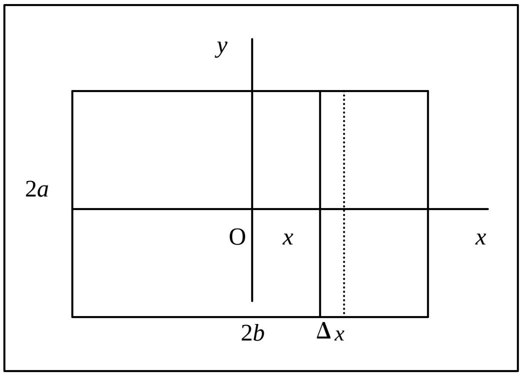
2-1　右図のように、一様で真っ直ぐな長さ L の棒 AB の任意の点 D におもりを掛け、の B 端に付けた紐を壁に取り付けた。そして、他端 A を壁に垂直に接触させ棒を静止させた。棒の質量を M、おもりの質量を m とし、壁と棒の間の摩擦係数を μ、とすれば、重りを掛ける位置 D を求めよ。



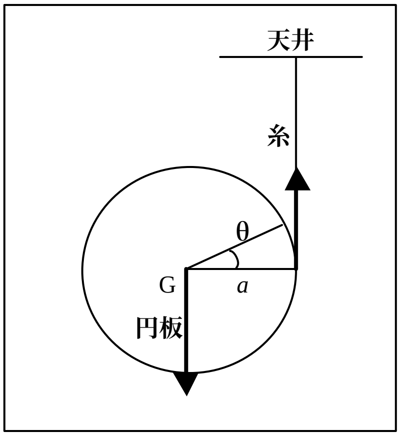
2-2　右図のように、質量 M、半径 r の半球を水平面に置き、点 A に質量 m のおもりをつるしたら静止した。この釣り合いの位置をどう示せばよいか。半球の重心 G は OG=3r/8 である。



2-3　右図のように、辺の長さが 2a と 2b、質量 M の薄い一様な長方形板の中心 O を通り、一辺に平行な直線を回転軸としたとき、その軸に対する長方形板の慣性モーメントを求めよ。また、回転半径はいくらか。O 点を原点とする xy 軸を設定し、y 軸、x 軸に対する慣性モーメントをそれぞれ I_y、I_x、回転半　径を R_y、R_x として計算せよ。



2-4　右図のように、半径 a、質量 M の円板の周りに細い糸を巻き付け、その一端を天井に固定して放すとき、円板の落下の加速度と糸の張力を求めよ。また、糸の上端を加速度αで引き上げるとき、円板の加速度と糸の張力はどうなるか。なお、円板の中心を一定の位置にとどまらせるには、糸の上端をどれだけの加速度で引き上げたらよいか。



2-5　ボウリングのボールが、ピンを倒すエネルギーについて論ぜよ。

2-6 フィギュアスケートの、スピン制御を、両手以外で行う方法を書け。

2-7　ヨーヨーに関する物理量を設定し、上下運動について解明せよ。

2-8　水面下 1000m における水圧を計算せよ。また、その深さに潜水する深海探査船の船壁 10m^2 に働く力は質量に換算すると、何トンになるか。

2-9　海面上の低気圧が 913 hPa である台風のもとで、海面はどれだけの高さだけ盛り上がるか。

2-10 水中で同じ深さの二点における圧力は、常に等しいことを証明せよ。

2-11　パスカルの原理を応用した油圧機について説明せよ。

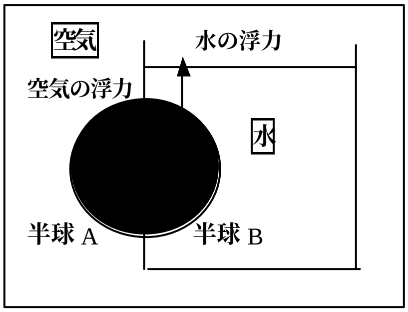
2-12　応力－ひずみ曲線を地球の岩盤に応用すれば、プレートテクトニクス理論が説明されるという。その説明をせよ。

2-13　式 2-79 の結果にいたる式の変化を詳しく書け。

2-14　単純梁の中点降下量と剛体の長さの関係をグラフで書け。

2-15　ねじれ現象とねじり応力用いている道具を上げ、解説せよ。

2-16　右図のように、円柱状のドラムが回転軸にセットされている。左半分 A は空気から浮力を鉛直上方に受け、右半分 B は水から浮力を鉛直上方に受けている。このため、左回りの回転力が生じ、水槽に水がある限りドラム回転し続ける。この文の誤りを正せ。



三章の問題

3-1　連続の法則を川の水の流れで説明せよ。

3-2　「気流の変化と登山」をテーマとして文章を作成せよ。

3-3　3-1 式を導け。

3-4　流体の連続性を、空気について説明せよ。

3-5　質量流と体積流量の関係式を導け。

3-6　3-10 式の結果までの変化を書け。

3-7　Torricelli の定理によって、深さ 3*m* の水槽の最下端から、細いコックから吹き出す水の速さはいくらか。

3-8　よどみ点において、面積を $1mm^2$ とすれば、ぶつかってくる粒子が、アボガドロ数のとき、粒子 1 個の面積を $1cm^2$ とすれば、よどみ点の面積はどれくらいの広さになるか。

3-9 ピトー管における流体の速さと水銀柱の高さとの関係グラフを書け。

3-10　粘性抵抗について、Hagen-Poiseuille の法則を、曲線を呈する川の流れで解説せよ。

3-11　Stokes の法則から、落下する物体の終端速度が求められる。終端速度とは、雨滴の地表面近くの速さが一定となっていることで説明されている。また、スカイダイビングという競技では、航空機から落下する競技者の速さが、あるときから一定になることでも説明される。この終端速度の例を挙げて、求めよ。

3-12　カルマン渦が発生する場合は、電線に吹き付ける強風や、旗を掲揚するポールに吹き付ける風による。このため、電線やポールは激しく振動し、騒音を発生させたり、ポールが金属疲労を起こし折れたりする。このほかにどんな場合にカルマン渦が発生し、どんな現象が起こるか解説せよ。

3-13　造波抵抗は、水と空気の境界層で最大となるが、水中を進む場合と比べて、なぜそうなるのか考察せよ。船と潜水艦を例として考察し、水中翼船やホバークラフトが出現したことについても言及せよ。

四章の問題

4-1　長さ 1*m* の金線の温度を 50℃上昇させると長さはいくらになるか。

4-2　銅製の半径 5*cm*、高さ 10*cm* の円柱容器一杯に、水が入っている。室温 20℃のときに加熱し、容器と水の温度が 80℃になったときまでの様子を説明せよ。

4-3　池のなかで、魚が生息できる条件を解説せよ。

4-4　絶対温度がゼロの近くにおける温度で、物質の状況を解説せよ。

4-5　気体の温度が 0℃のとき、体積が 100cm^3、圧力が 1000*hPa* であった。圧力を一定にし、温度を 27℃にしたとき、体積はいくらになるか。次に、温度をそのままにして、圧力を 10 倍にしたとき、体積はいくらになるか。

4-6　やかんや鍋は、ステンレス製が多いことを説明せよ。

4-7　物体を加熱する方法を五つあげ、それぞれを説明せよ。

4-8　熱伝導、熱対流、熱放射をキーとして、一戸建て住居の理想的な作り方について論文を書け。

4-9　水について、固体、液体、気体の変化を、熱エネルギーを柱とする文章を作れ。

4-10　金の温度をどんどん上げてゆくと、どうなるかを説明せよ

4-11　気体を冷却する方法を三つあげ、それぞれを説明せよ。

4-12　二酸化炭素の温度をどんどん下げてゆくと、どうなるか説明せよ。

4-13　液体ヘリウムの超流動現象を解説せよ。

4-14　液化できない気体があるが、なぜ液化できないか解説せよ。

4-15　ヘリウムに関する分子運動論をまとめよ。

4-16　理想気体の状態方程式と実在気体の状態方程式の違いを解説せよ。

4-17　任意の気体の、0℃、1 気圧における分子の速さを計算せよ。

4-18　外部からのエネルギー補給なしに、永久に動き続けるものを、永久機関というが、このような機関は存在しないことを証明せよ。

4-19　式 4-63 を導き、その精密なグラフを作成せよ。

五章の問題

5-1　波の振幅が 1*m* で、振動数 20 1/*sec* のとき、10*sec* 後の変位はいくらか。

5-2　周期 2 秒で、振幅 4*m*、波長 10*m* の波が、原点から 30*m* 離れた地点へ到達する時間が 10 秒であったとき、その変位 *y* を求めよ。

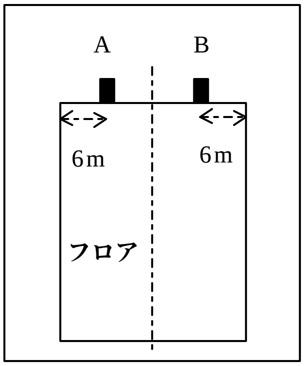
5-3　鋼鉄製のレールを伝わる縦波と横波の速さを計算せよ。

5-4　ピアノの弦は鋼線であるが、100*N* の張力で張ったときの、横波の速さを計算せよ。

5-5　トロコイド曲線について説明せよ。

5-6　水面波について、反射の法則を証明せよ。

5-7　学校体育館のフロアが、縦 36*m*、横 24*m* である。右図のようにスピーカーA,Bが置かれている。波長 3*m* の純音を流したとき、フロアにできる縞模様を、精密に描け。



5-8　波の合成法により、異なる三種類の波の合成波を精密に描け。

5-9　大きさ 60*db* と 60*db* の音を同時に鳴らしたら、何 *db* の大きさになるか計算せよ。

5-10　波の合成は、波を重ね合わせて振幅の和を計算して簡単にできる。だがその逆、すなわち、図上で、合成された波を元の波に戻すこと（分析とも言う）はできない。このため、フーリエー級数を用いたフーリエー解析が行われる。この、フーリエー級数とフーリエー解析を調べ、$y_1=A\sin 2\pi f_1 t$、$y_2=A\sin 2\pi f_2 t$ に関する合成と分析について解説せよ。

5-11　人の声をフーリエー解析し、音の振動数と大きさの関係をグラフに表示しものが、声紋と言われている。これは音の波形による音色ではない。この違いを解説せよ。

5-12　1000*Hz* の音を一本の弦で発生させる場合、張力と弦の長さの関係式を求め、グラフを描け。

5-13　**管内の気柱振動で、開端と閉端における、粒子の振動について解説せよ。**

5-14　**縦笛を製作せよ。**

5-15　**図** 5-23 **の装置を作り、連制振動の時間経過における振幅変化を測定し、振幅と時間のグラフを描け。**

5-16 **試験管を** 8 **本用意し、水の量を調節して自然長音階を鳴らせて見よ。**

5-17　**踏切で静止している人に、列車が時速** 100*km* **で近づいてくる。振動数が** 1000*Hz* **の警笛は、耳に入るときに、いくらの振動数となるか。**

5-18　　**気温** 0℃**の北極海で、振動数** 1000*Hz* **の霧笛を発しながら、**36*km/h* **で航行する船舶が、氷山からの反射音を** 4 **秒後にキャッチした。そのときの霧笛の振動数はいくらであるか。**

5-19　**地震の震源における、エネルギーの大きさは、マグニチュードで示される。また、観測点の揺れの大きさは震度で示される。この両者を調べ、解説せよ。同じ地震でも、観測点が変われば震度に大きな違いがあり、震度はどのような要素によって異なるか説明せよ。**

5-20　**初期微動継続時間を計算する式を求めよ。**

5-21　**群発地震、プレートテクトニクス理論、活断層地震、火山性地震について、地震発生時のメカニズム、マグニチュードの規模を説明し、過去の例から、震源、マグニチュード、震度、被害、損害額について概要をまとめよ。**

索引

Ewing の装置.................109
Kater の可逆振子............79
L 波................................184
Poisson 比......................105
P－*V* 曲線......................156
P 波................................183
S 波................................183
Torricelli の定理............118
Venturi 管.......................118
Young 率.........................104
アネロイド気圧計..........97
うなり............................182
エルグ..............................53
エレベータ......................38
エンジン........................155
カルノーサイクル........152
カルマン渦....................124
キャベンディッシュ........6
コマの才差運動..............87
ゴルフボール...............126
シーソー..........................90
シャルルの法則............141
ジャンプ競技..................27
ジュール..........................53
ジュールの実験............142
スキーヤーの運動方程式................................26
スピードガン................182
スペクトル分光計........182
ダイン..............................14
たわみ............................107
たわみの基礎式............108
テコの法則......................90
デシベル........................172
ドップラー効果............181
トリチェリーの実験......97
トロコイド曲線............162
ニュートン......................14
ニュートンの冷却の法則...............................148
ねじり振り子の周期....111
ねじれ振り子................110
ハーゲン・ポアズイユの法則.......................123
パスカルの原理............101
バネのダンパー..............46
バネの接続......................45
バネの単振動..................44
バネ定数..........................45
ひずみ............................103
ファン・デル・ワールス...............................157
フォルタンの気圧計......97
フックの法則................104
フラップ........................131
ブランコ........................179
ヘクトパスカル..............97
ベクトル差........................5
ベクトル積......................63
ベクトル和........................4
ヘリコプターの揚力....132
ベルヌーイの定理........117
ボイル・シャルルの法則...............................151
ボイルの法則........140, 154
ボールのホップ............125
ボルツマン定数............154
マグヌス効果................126
ヤング率の測定............176
よどみ点........................119
リポコデュウム............175
レイノルズ数................124
ローターのピッチ........132
ロケット..........................38
圧縮................................156
圧力..................................96
位相................................165
位置エネルギー..............54
緯度....................................2
右ねじ..............................62
渦抵抗............................134

運動エネルギー.............53
運動の種類.......................7
運動の法則.....................12
運動方程式.....................28
運動量保存の法則.........49
液体酸素.......................152
液面曲線.......................128
円運動............................39
円形波...........................166
煙突..............................146
遠心力............................36
鉛直投げ下ろし運動......21
鉛直投げ上げ運動.........21
応力..............................102
応力‐ひずみ線図.......103
横波..............................161
温水ポット...................148
温度勾配.......................145
音の強さ.......................172
音の高低.......................170
音の大きさ...................171
音楽ホール...................170
音叉..............................180
音色..............................172
音速測定.......................180
音波..............................168
加速度............................18
回折..............................164
回転運動.........................59
回転運動のエネルギー..70
回転運動の運動方程式..80
回転軸と回転面.............10
回転体の自由軸.............86
回転放物面...................122
開管..............................178
外力の仕事.....................67
角運動量保存の法則......77
角速度............................33
楽器..............................180
活断層...........................184
完全弾性衝突.................49
干渉..............................164
干渉縞...........................166
慣性モーメント.............72
慣性系............................36
慣性質量.........................30
管楽器...........................175
観測者............................17
基礎石台.........................30
基本軸..............................3
基本振動.......................177
気体の液化曲線...........151
気体の分子運動...........153
気体定数.......................154
気柱共鳴.......................180
共鳴箱...........................180
強制振動.......................179
凝固熱...........................150
凝集熱...........................150
凝着説............................25
曲率半径.........................35
偶力................................63
偶力の腕の長さ.............64
屈折率...........................163
結晶構造.......................142
見かけの膨張率...........138
弦の振動.......................173
減衰振動.......................179
固定軸周りの運動方程式.................................77
固定軸周りの剛体のエネルギー式.................71
固有振動数...................180
向心加速度.....................34
硬式野球のボール........126
航空機の速さ測定........119
高気圧............................98
剛性率...........................105
剛体................................60
剛体の変形...................102
合成波の振幅...............165
阪神淡路大地震...........184
作用反作用の法則.........12
山 159
酸素..............................154
残響..............................170
残響時間.......................170
残留変形.......................103
仕事................................51
時間微分.........................62

索引

自然長音階.................... 178
自動車の騒音................ 168
自由振動........................ 179
自由落下運動........... 19, 21
軸性ベクトル.................. 69
質量流............................ 115
実在気体........................ 156
実用的な波の方程式.... 160
斜面上の円柱.................. 81
斜面上の連結物体.......... 28
主要動............................ 184
縦笛................................ 178
縦波................................ 168
重心.................................. 59
重力.................................... 7
重力加速度...................... 14
重力波............................ 162
瞬時中心.......................... 62
循環................................ 146
初期微動継続時間........ 184
消波の理論.................... 134
衝撃運動.......................... 84
衝撃力.............................. 84
衝撃力による運動量の
　変化.............................. 84
衝突現象.......................... 49
状態量............................ 155
蒸発................................ 150
蒸発熱............................ 150
振り子の等時性.............. 42
振動数............................159
振幅................................165
進行波と反射波............173
震央................................183
震源................................184
震源距離........................184
人工衛星............................6
垂直抗力..........................24
水の蒸発熱....................150
水の密度........................139
水槽の放水....................117
水中翼船........................133
水当量............................144
水面波............................162
正射影..............................38
静止摩擦係数..................24
赤方変移........................182
接触角............................128
接触時間..........................50
接線加速度......................34
節 167
絶対温度........................141
潜水艦..............................99
線膨張率........................137
全圧力..............................96
全力積..............................83
塑性................................103
相対速度..........................17
相当単振子の長さ..........85
総質量..............................88
走行安定フイン 134
造波抵抗 165
速度 15
速度勾配 121
太陽定数 147
打撃 84
体積弾性率 105
体積流量 115
体膨張率 138
対流 150
大気圧 98
谷 159
単車の向心力 35
単純梁 109
単振動 41
単振動の条件式 44
弾性 103
弾性エネルギー 106
弾性限界 103
弾性衝突 49
弾性波 161
弾性疲労 103
地球の歳差運動 11
地震 183
中点降下量 109
中立層 107
超高層ビル 31
跳ね返りの係数 49
津波 162
低気圧 98

定圧比熱........................169
定常波............................167
定常流............................113
定積比熱........................169
抵抗係数........................123
梯子..................................92
等圧線............................113
等温変化........................152
等加速度運動..................21
等高線............................113
等積変化........................152
等速円運動................32, 34
等速度運動......................22
陶器内の棒......................94
動圧力............................133
内部エネルギー............155
内力がする仕事..............67
二酸化炭素....................156
熱エネルギー................155
熱の仕事当量................142
熱振動............................142
熱伝導............................145
熱放射............................147
熱容量............................143
熱量の単位....................142
粘性................................121
粘性係数........................132
粘性抵抗........................133
波の方程式....................159
波動................................158
破壊応力........................103
倍振動............................177
媒質................................158
反響................................169
反射の法則....................163
比熱................................143
比熱の測定....................143
比例限界........................103
非弾性衝突......................49
非定常流........................113
飛行機............................131
表面張力................127, 129
表面張力波....................162
浮力..................................99
腹 167
複振子..............................77
沸点................................150
沸騰................................150
分子の平均速さ............154
平行四辺形の面積..........63
平行軸の定理..................75
平行力の合成..................66
平面運動のエネルギー式.................................71
平面運動の運動方程式..83
平面板の定理..................76
並進運動の運動エネルギー.............................70
並進運動の運動方程式..80
閉管................................177
片持梁............................108
保存力..............................56
放物運動のエネルギー..55
放物線..............................21
棒の釣り合い..................91
摩擦力..............................25
万有引力............................6
毛管現象........................130
油滴................................129
融解熱............................150
融解熱の大きさ............149
揚力................................131
翼の揚力........................125
理想気体........................156
理想気体の状態方程式 157
流線........................113, 115
流線型............................134
流速の測定....................118
流速分布........................122
流体................................112
流体の運動方程式........116
流体の粘性....................120
流体中の圧力................100
粒子の振動エネルギー 142
力のモーメント..............89
力のモーメントの釣り合い.............................90
力学的エネルギー保存の法則..........................57
力積..................................47

索引

力積のモーメント.......... 84
臨界圧力................ 152, 156
臨界温度........................ 156
臨界状態........................ 156
臨界体積........................156
臨界点............................152
冷蔵庫............................148
連成振動........................179
連続の法則 115
連通管 100

改訂　入門物理学

目次

第一章　質点系の力学 1

第一節　空間と位置 1

マクロな位置関係 1

ミクロな位置関係 2

位置の変化 3

第二節　ベクトルとスカラー 4

ベクトルの加法・減法 4

第三節　万有引力と運動の分類 6

力の定義 6

運動の種類 7

質点系と剛体系 8

並進運動と回転運動 8

回転軸と回転面 9

第四節　ニュートンの運動の三法則と力の定義 12

運動の三法則 12

慣性系 12

運動方程式 13

重力加速度 13

力の単位 14

第五節　運動の記述 15

速度の定義 15

加速度の定義 16

相対運動と相対速度 17

加速度の大きさの公式と図形表現 17

等加速度直線運動 18

目次

重力の作用による落下運動 19

第六節　二つ以上の物体間における力の相互作用 22

床とその上の物体 22

斜面上の運動（スキー競技） 24

固体間の摩擦力 25

空気抵抗 25

滑り摩擦力と運動方程式 26

ジャンプ競技 26

曲面からの垂直抗力と離脱 27

斜面上の互いに運動する二物体の相互運動 27

水平面上の二物体の相互運動（地震動と建築物） 29

寺院建築物が地震に強い理由 30

木造建築物の高さ限界 31

第七節　固定点を中心とする質点の円運動 32

水平面で、紐につけられた物体の回転 32

向心加速度と向心力 34

曲率半径と単車走行 34

慣性系と遠心力 36

エレベーターの運動と慣性力 37

第八節　回転から振動へ 38

円運動の正射影と振動理論 38

スクリーン上の影の運動（単振動） 41

単振り子 42

振り子の等時性 43

バネにつり下げられた錘の単振動 43

バネの利用（衝撃力の吸収） 45

第九節　運動量と衝突現象 46

運動量と力積 46

物体の衝突と運動量保存の法則（バットでボールを打つ） 48

衝突現象と跳ね返りの係数 49

衝突現象のベクトル表現 49
第十節　仕事と力学的エネルギー 51
物体がする仕事 51
仕事と運動エネルギー 52
エネルギーの単位 53
人が重力に逆らってする仕事と位置エネルギー 53
重力がする仕事と位置エネルギーの減少 54
位置エネルギーの増加と運動エネルギーの減少 55
力学的エネルギー保存の法則 56
力学的エネルギーと他物体からの仕事との関係 57
力学的エネルギーによる計算例 57
仕事、運動エネルギー、運動量の関係 58
第二章　剛体系の力学 59
第一節　剛体の運動 60
剛体の平面運動 60
剛体とは 60
平面運動　図 2-1 棒の平面運動 60
瞬時中心 61
剛体の回転運動 62
第二節　剛体に働く力のモーメント 63
力のモーメント 63
偶力 63
作図による平行力の合成 64
ベクトル計算による平行力の合成 66
第三節　剛体に働く力がする仕事 67
内力がする仕事 67
回転における外力の仕事 67
平面運動における外力の仕事 68
第四節　剛体のエネルギー 69

目次

軸に対して回転する剛体の運動エネルギー 69
剛体の運動エネルギー式 71
第五節　慣性モーメント 72
回転体の慣性モーメント 72
いろいろな剛体の、回転軸と慣性モーメント 73
慣性モーメントに関する定理 75
第六節　固定軸周りの運動方程式 77
運動方程式と角運動量 77
複振子（物理振子ともいう） 77
第七節　平面運動の運動方程式 80
運動方程式 80
斜面上の円柱の運動 81
第八節　衝撃力による剛体の運動 83
運動量の変化 83
打撃の中心 84
回転体の自由軸 86
コマの才差運動 86
第九節　剛体の静力学 88
総質量と重心 88
力の作用による、軸に対する回転運動と力のモーメント 89
剛体に作用する力のモーメントの釣り合い 90
剛体に作用する力の釣り合いと、力のモーメントの釣り合い 91
力のモーメントの計算例 92
第十一節　剛体に作用する流体の圧力 96
圧力とは 96
水中の圧力と単位 97
空気中の圧力 97
浮力 98
圧力と浮力 99
パスカルの原理 101

第十二節　剛体の変形と応力 102
剛体を変形させる要因 102
剛体変形の種類と応力 102
剛体の弾性と塑性（応力―ひずみ線図） 103
Hook の法則と弾性定数 104
Young 率 104
Poisson 比 105
体積弾性率 105
剛性率 105
伸びにおける弾性エネルギー 106
たわみ（曲げともいう） 107
たわみの基礎式 108
片持梁のたわみ量計算 108
単純梁の中点降下量 109
ねじれとねじれ振り子 110
ねじり振り子の実験 111
第三章　流体の力学 112
第一節　流体の基本的物理量 112
流体中を運動する剛体の考え方 112
流動する流体の基本的物理量 112
流線と流動状態 113
流体を構成する粒子数と連続の法則 113
山を越える気団と流線 114
流管と流量 115
連続の式 115
第二節　流体の運動方程式 116
定常流における運動方程式 116
Bernoulli（ベルヌーイ）の定理 117
Torricelli（トリチェリー）の定理 117

目次

Venturi（ベンチュリー）管 118
よどみ点と Pitot（ピトー）管 119
第三節　粘性流体の流動 120
ずり応力と粘性係数 120
粘性流体の、速度分布と体積流量 121
層流・乱流と Reynolds（レイノルズ）数 123
流体の抗力と抵抗係数 123
抵抗係数とレイノルズ数の関係と Karman（カルマン）渦 124
揚力 125
Magnus（マグヌス）効果（ボールのホップやカーブ） 125
第四節　表面張力と毛管現象 127
表面張力 127
表面張力がする仕事 127
固・液・気体の接触と接触角 128
固・液・気体間の表面張力の釣り合い 128
水面に浮かんだ油滴と油膜 129
表面張力と圧力 129
毛管現象 130
第五節　剛体に対する流体の抵抗力 131
流体中を運動する剛体が流体から受ける抵抗 131
第四章　熱現象の力学 136
第一節　固体の膨張 136
線膨張 136
体膨張 137
第二節　液体の膨張 138
見かけの膨張 138
温度と密度 139
水の密度は特殊 139
第三節　気体の膨張 140

ボイルの法則 140
シャルルの法則 140
ボイル・シャルルの法則 141
密度、圧力、絶対温度の関係 141
第四節　熱量・熱エネルギー・比熱 **142**
熱量 142
仕事と熱エネルギー 142
比熱と熱容量 143
比熱の測定 143
ジュールの実験と比熱 144
第五節　熱の伝搬 **145**
熱伝導 145
熱対流 146
熱放射 147
冷却の法則 148
熱の伝搬を遮断する 148
第六節　物質の状態変化 **149**
固体の融解 149
液体の蒸発と気体 149
物質の状態変化と仕事 150
液化 151
臨界点 152
圧力 P、体積 V、絶対温度 T の相互変化 152
第七節　気体の分子運動 **153**
分子運動と圧力 153
分子の平均の速さ 154
ボルツマン定数と気体定数 154
第八節　熱力学の第一法則と理想気体 **155**
熱力学の第一法則と第一種の永久機関 155
理想気体の状態方程式 156

目次

実在気体の液化 156
Van der Waals（ファン・デル・ワールス）の状態方程式 157

第五章　波と音の力学 158

第一節　波動現象の基本的物理量 158
波の方程式 158
波の方程式の一般型 159
波の物理量 159
波の方程式の実用型 160

第二節　波の種類 161
横波と縦波 161
波の速さと媒質 161
水面波 162

第三節　波の性質 163
反射 163
屈折 163
回折 164
干渉 164
波の合成 165
球面波の合成と干渉縞の計算 166
定常波 167

第四節　音波 168
音波 168
音速 168
音の伝わり方 169

第五節　音の三要素 170
高さ 170
音の強さ 171
音の、人間感覚における大きさ 171
音色（ねいろ） 172

第六節　発音体の振動 173
弦の振動 173
管内の気柱振動 175
Kundt（クント）の実験によるヤング率の測定 175
管内気柱の閉端反射 176
閉管内の空気振動 177
管内気柱の開端反射 177
開管内の空気振動 178
第七節　共振と共鳴 179
固有振動数と共振 179
共鳴 180
気柱共鳴による音速の測定 180
第八節　DOPPLER（ドップラー）効果とうなり 181
ドップラー効果 181
うなり 182
第九節　地震波 183
地震波の種類と速さ 183
地震波形 183
震源距離と大森公式 184
一章の問題 185
二章の問題 189
三章の問題 191
四章の問題 192
五章の問題 193